科学题阶

1刷基础 2刷易错 3刷提分 4刷素养
5刷难关 6刷压轴 7刷真题 8刷综合

理想树

高考必刷题®

总主编：杨文彬
主　编：李志敏等

2027

合订本

含2026年高考真题

数学

一轮强化 全程上分

AI赋能·学力满点

配狂K重难点

3000+分钟视频
电子错题本
智能批改

首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

CONTENTS 目录

正文　答案

第1章 集合与常用逻辑用语、不等式

第1节 集合 …… 1 / 175

题型1 元素与集合、集合与集合的关系
题型2 集合的交、并、补运算
题型3 集合中的含参问题
题型4 容斥原理的应用
题型5 集合新定义问题
易错点1 代表元素混淆
易错点2 处理集合的包含关系问题时忽略空集、端点值取舍判断不清

第2节 常用逻辑用语 …… 2 / 175

题型1 充分、必要条件
题型2 全称量词命题、存在量词命题
易错点 使用集合法解决充分、必要性问题时对包含关系判断不清

第3节 不等式的性质与一元二次不等式 …… 3 / 176

题型1 不等式的性质
题型2 解一元二次不等式
题型3 不等式恒成立(有解)问题
易错点1 忽略对二次项系数等于0的讨论
易错点2 不等式恒成立与能成立的含义分辨不清

第4节 基本不等式 …… 4 / 178

题型1 利用基本不等式求最值
题型2 重要不等式链
易错点 忽略基本不等式的使用前提

真题综合测试 …… 5 / 179

第2章 函数及其性质

第1节 函数的概念及其表示 …… 7 / 181

题型1 函数的定义域
题型2 函数的值域
题型3 函数的解析式
题型4 分段函数
易错点 对复合函数的定义域分辨不清

第2节 函数的基本性质 …… 8 / 182

题型1 函数的单调性及其应用
题型2 函数的奇偶性及其应用
题型3 函数的周期性与图象的对称性及其应用
题型4 函数性质的综合应用
易错点1 单调性问题中忽略考虑定义域
易错点2 利用分段函数的单调性求参数时,忽略对间断点处的讨论
易错点3 奇偶性问题中忽略函数的定义域

本书标注“较难”“难”的题目均配有讲题视频,可扫描内文二维码查看。

上分抢先看

真题直击·[全国Ⅱ2026·2]集合的交集运算,P1T3
真题直击·[天津2026·1]集合的补集与并集运算,P5T1
真题直击·[天津2026·2]一元二次不等式及充分必要条件的判断,P5T14
真题直击·[上海2026·7]利用重要不等式求最值,P6T27
学霸说·结合重要不等式链解决最值问题,P4T6
创新好题·新思维·利用容斥原理解决集合问题,P1T9
创新好题·新风向·基本不等式与数列的综合应用,P4T3
创新好题·新风向·基本不等式与导数的综合应用,P4T7
狂K重难点1·集合的含参问题,P375
狂K重难点2·基本不等式的变形技巧,P375

真题直击·[全国Ⅰ2026·19]集合新定义问题、抽象函数性质的应用,P19T1
真题直击·[全国Ⅱ2026·8]函数的奇偶性、函数图象的对称性,P18T1
真题直击·[全国Ⅱ2026·13]函数与方程,P19T16
真题直击·[天津2026·4]函数图象的识别,P19T13
真题直击·[天津2026·6]比较大小问题、对数函数的图象与性质,P18T9
学霸说·特例法解决与函数周期有关的问题,P9T13
学霸说·利用三次函数图象的对称中心解决求参问题,P10T4
学霸说·特例法解决抽象函数问题,P13T7

目录 CONTENTS

第 3 节　基本初等函数 …… 11 / 186

题型 1　指数幂与对数运算
题型 2　幂函数的图象与性质
题型 3　指数(型)函数的图象与性质
题型 4　对数(型)函数的图象与性质
题型 5　指数、对数、幂函数的综合应用

重难专题 1　抽象函数 …… 13 / 188

突破 1　赋值法　/　突破 2　函数性质法　/　突破 3　模型法

第 4 节　函数的图象 …… 14 / 190

题型 1　函数图象的变换
题型 2　根据解析式识别函数的图象
题型 3　已知函数图象判断函数的解析式

第 5 节　函数与方程 …… 15 / 191

题型 1　判断函数零点所在区间
题型 2　判断零点(方程的根)个数
题型 3　根据零点(方程的根)情况求参数取值范围
题型 4　多零点问题

第 6 节　函数模型及其应用 …… 17 / 193

题型 1　已知函数模型求解实际问题
题型 2　构建函数模型求解实际问题

真题综合测试 …… 18 / 194

第 3 章　导数及其应用

第 1 节　导数的运算及几何意义 …… 20 / 197

题型 1　导数的定义及计算
题型 2　在某点的切线问题
题型 3　过某点的切线问题
题型 4　公切线问题
易错点　求切线方程时,混淆“在”与“过”

第 2 节　利用导数研究函数的单调性、极值、最值 …… 21 / 198

题型 1　利用导数研究函数的单调性(不含参数)
题型 2　利用导数研究函数的单调性(含参问题)
题型 3　利用导数研究函数的极值
题型 4　利用导数研究函数的最值
易错点 1　利用“导数为 0”求极值点时未进行检验
易错点 2　求最值时忽略闭区间端点

第 3 节　利用导数研究函数的零点 …… 25 / 203

题型 1　讨论(判断)函数的零点个数
题型 2　根据零点情况求参数取值范围
易错点　画函数图象时忽略变化趋势和特殊点

重难专题 2　隐零点问题 …… 28 / 207

创新好题 · 新思维 · 利用赋值法解决已知函数的奇偶性求参数的值的问题,P10T1
创新好题 · 新风向 · 函数与集合的综合应用,P10T10
创新好题 · 新思维 · 利用函数图象的对称性解决两函数图象交点的横坐标之和问题,P15T9
创新好题 · 新情境 · 与高斯函数有关的多零点问题,P16T10
创新好题 · 新风向 · 人工智能背景下指数型、对数型函数模型的应用,P17T2
狂K重难点 3 · 函数的单调性与奇偶性,P377
狂K重难点 4 · 函数的周期性与图象的对称性,P378
狂K重难点 5 · 抽象函数问题,P379
狂K重难点 6 · 分段函数问题,P380
狂K重难点 7 · 复合函数问题,P381

真题直击 · [全国Ⅰ 2026 · 4]曲线“在”一点处的切线方程,P39T1
真题直击 · [全国Ⅰ 2026 · 6]已知函数最值求参数问题的不同求解方法,P39T6
真题直击 · [全国Ⅱ 2026 · 19]不等式恒成立问题、零点存在定理,P41T8
真题直击 · [天津 2026 · 20]不等式恒成立问题、对数放缩,P42T10
学霸说 · 三次函数图象的切线问题,P20T6
学霸说 · 几何意义法解决函数极值点取值范围的问题,P24T9
学霸说 · 参变分离法解决函数零点问题,P26T10
学霸说 · 构造函数法解决函数零点问题,P27T1
学霸说 · 更换主元,利用导数研究不等式恒成立问题,P30T3
学霸说 · 利用幂级数展开式研究不等式恒成立问题,P43T4

CONTENTS 目录

第 4 节　不等式恒成立与存在性问题 …… 29 / 208
- 题型 1　分离参数
- 题型 2　分类讨论
- 题型 3　最值转化
- 题型 4　端点效应

第 5 节　构造函数法的应用 …… 32 / 210
- 题型 1　直接构造法
- 题型 2　由导函数构造原函数

重难专题 3　同构思想 …… 33 / 212

重难专题 4　放缩思想 …… 35 / 213
- 突破 1　切线放缩 / 突破 2　三角放缩

重难专题 5　双变量问题 …… 36 / 214
- 突破 1　减元 / 突破 2　找主元

重难专题 6　极值点偏移问题 …… 37 / 215

压轴专题 1　函数与导数的新考向 …… 38 / 215

真题综合测试 …… 39 / 216

章末综合测试 …… 43 / 225

第 4 章　三角函数

第 1 节　三角函数的概念、同角三角函数的基本关系及诱导公式 …… 46 / 229
- 题型 1　三角函数的概念
- 题型 2　同角三角函数的基本关系
- 题型 3　诱导公式
- 易错点　诱导公式与角所在的象限无关

第 2 节　三角恒等变换 …… 47 / 230
- 题型 1　角的变换问题
- 题型 2　给角求值
- 题型 3　给值求值
- 题型 4　给值求角
- 易错点　利用三角恒等变换求函数值时忽略角的范围

第 3 节　三角函数的图象与性质 …… 49 / 232
- 题型 1　三角函数的图象及变换
- 题型 2　三角函数的单调性与最值
- 题型 3　与三角函数有关的周期问题
- 题型 4　三角函数的奇偶性与图象的对称性
- 题型 5　三角函数的零点问题
- 易错点 1　对图象变换针对自变量理解不清
- 易错点 2　求最值时忽视 $y=\sin x$ 或 $y=\cos x$ 的值域
- 易错点 3　忽略“上升”零点或“下降”零点

创新好题 · 新定义 · 曼哈顿距离,P38T1

狂 K 重难点 8 · 公切线与多切线问题,P382

狂 K 重难点 9 · 利用导数研究函数的单调性、极值与最值,P383

狂 K 重难点 10 · 利用导数研究函数零点问题,P384

狂 K 重难点 11 · 三次函数问题,P386

狂 K 重难点 12 · 隐零点问题,P387

狂 K 重难点 13 · 利用导数研究不等式恒成立问题,P388

狂 K 重难点 14 · 构造函数比较大小,P390

狂 K 重难点 15 · 逆向构造法的应用,P390

狂 K 重难点 16 · 同构问题,P391

狂 K 重难点 17 · 放缩技巧,P392

狂 K 重难点 18 · 双变量问题,P393

狂 K 重难点 19 · 极值点偏移问题,P394

真题直击 · [全国Ⅰ2026 · 3]诱导公式、集合的交集运算,P55T1

真题直击 · [全国Ⅰ2026 · 13]函数的奇偶性、正弦型函数的单调性,P56T16

真题直击 · [全国Ⅱ2026 · 7]二倍角公式、同角三角函数的基本关系,P55T3

学霸说 · 排除法确定三角函数的解析式,P49T2

学霸说 · 积化和差公式在化简三角函数解析式中的应用,P51T18

学霸说 · 特殊位置法解决三角函数图象交点问题,P53T9

创新好题 · 新情境 · 尺规作图法的背景下考查三角恒等变换,P48T10

创新好题 · 新定义 · 正弦方差,P53T13

创新好题 · 新风向 · 三角函数与导数的综合应用,P58T9

目录 CONTENTS

重难专题 7 三角函数中 ω 的求解 …… 54 / 239

突破 1 图象变换与 ω / 突破 2 单调性与 ω

突破 3 最值、值域与 ω / 突破 4 对称性、零点与 ω

真题综合测试 …… 55 / 240

章末综合测试 …… 57 / 243

第 5 章 解三角形

第 1 节 解三角形及其应用 …… 59 / 246

题型 1 正弦定理的应用

题型 2 余弦定理的应用

题型 3 与三角形“三线”有关的问题

题型 4 正、余弦定理的综合应用

题型 5 多三角形问题

题型 6 解三角形的实际应用

易错点 1 解的取舍有误

易错点 2 忽略对角范围的限制条件

重难专题 8 解三角形中的范围与最值问题 …… 64 / 252

突破 1 转化为边 / 突破 2 转化为角

真题综合测试 …… 66 / 254

章末综合测试 …… 69 / 258

第 6 章 平面向量、复数

第 1 节 平面向量的线性运算、基本定理及坐标运算 …… 71 / 260

题型 1 向量的线性运算及共线定理的应用

题型 2 平面向量基本定理的应用

题型 3 向量的坐标运算

第 2 节 平面向量的数量积及其应用 …… 72 / 261

题型 1 求平面向量的数量积

题型 2 求平面向量的投影向量

题型 3 平面向量的模的问题

题型 4 平面向量的夹角问题

易错点 对投影向量的概念理解不清

第 3 节 复数 …… 74 / 264

题型 1 复数的概念

题型 2 复数的四则运算

题型 3 复数的模

题型 4 复数的几何意义及其应用

易错点 忽视复数是纯虚数的充要条件

真题综合测试 …… 75 / 264

狂 k 重难点 20 · 三角函数图象与性质的综合应用,P397

狂 k 重难点 21 · 三角函数中 ω 的取值问题,P398

真题直击 · [全国 I 2026 · 16] 利用正、余弦定理解决多三角形问题,P67T4

真题直击 · [全国 II 2026 · 17] 利用正、余弦定理解三角形,P68T5

真题直击 · [天津 2026 · 12] 正弦定理的应用、同角三角函数的基本关系,P66T2

学 霸 说 · 利用极化恒等式求解三角形的中线长,P59T7

学 霸 说 · 利用射影定理求解三角形边长比值的范围,P61T19

学 霸 说 · 利用海伦公式和正弦定理求解三角形外接圆的面积,P62T1

狂 k 重难点 22 · 三角形中的边角互化,P400

狂 k 重难点 23 · 解三角形中的最值问题,P401

真题直击 · [全国 I 2026 · 2] 平面向量基本定理的应用,P75T1

真题直击 · [全国 I 2026 · 9] 共轭复数、复数的模、复数的四则运算,P76T19

真题直击 · [全国 II 2026 · 1] 复数的乘法运算,P76T20

真题直击 · [全国 II 2026 · 3] 平面向量的数量积、向量的模,P75T9

真题直击 · [天津 2026 · 10] 复数的平方运算,P76T32

真题直击 · [天津 2026 · 14] 平面向量的线性运算,P75T7

狂 k 重难点 24 · 平面向量的数量积问题,P402

狂 k 重难点 25 · 复数的几何意义,P403

CONTENTS 目录

第7章 数列

第1节 数列的基本性质 …… 77 / 267

题型1 已知 S_n 求 a_n

题型2 数列的递推关系

题型3 数列的单调性与最值

题型4 周期数列

易错点1 忽视检验首项

易错点2 忽略数列中 n 的范围为正整数

第2节 等差数列及其前 n 项和 …… 78 / 268

题型1 等差数列基本量的计算

题型2 等差数列的判定与证明

题型3 等差数列性质的应用

题型4 等差数列前 n 项和的最值问题

易错点 忽略等差数列的公差可为0

第3节 等比数列及其前 n 项和 …… 81 / 270

题型1 等比数列基本量的计算

题型2 等比数列的判定与证明

题型3 等比数列性质的应用

易错点 忽略等比数列的公比与项不能为0

重难专题9 数列的通项公式的求法 …… 84 / 273

突破1 利用 a_n 与 S_n 的关系求通项 / 突破2 累加法、累乘法求通项

突破3 构造法求通项

重难专题10 数列求和的方法 …… 85 / 274

突破1 倒序相加法 / 突破2 错位相减法 / 突破3 裂项相消法

突破4 分组、并项求和法

重难专题11 特殊数列问题 …… 87 / 276

突破1 数列公共项问题 / 突破2 插入项问题

突破3 数列奇偶项问题

重难专题12 数列不等式 …… 88 / 276

突破1 数列不等式恒(能)成立问题 / 突破2 数列放缩

压轴专题2 数列与其他知识的融合 …… 90 / 278

真题综合测试 …… 91 / 279

章末综合测试 …… 94 / 283

真题直击·[全国Ⅰ2026·7]一百零八塔背景下的等差数列问题,P91T4

真题直击·[全国Ⅰ2026·14]子数列问题,P91T15

真题直击·[全国Ⅱ2026·10]等比数列的前 n 项和,P91T10

真题直击·[全国Ⅱ2026·12]等差数列的通项公式及前 n 项和,P91T7

真题直击·[天津2026·8]数列基本量的求解,P91T1

真题直击·[天津2026·19]数列与集合的综合问题、并项求和、错位相减法求和,P93T5

真题直击·[上海2026·9]从函数角度研究数列的单调性,P91T8

创新好题·新情境·斐波那契数列的应用,P77T5

创新好题·新情境·三角形数阵中的数列问题,P80T7

创新好题·新风向·圆与数列的综合问题,P83T10

创新好题·新风向·数列与导数的综合,P90T2

创新好题·新风向·数列与三角函数的综合,P94T5

创新好题·新定义·J-J数列,P95T12

创新好题·新风向·数列与抛物线的综合,P95T13

狂K重难点26·数列求通项的方法,P404

狂K重难点27·数列求和的方法,P405

狂K重难点28·数列奇偶项问题,P407

狂K重难点29·数列不等式的放缩问题,P409

第8章 立体几何

第1节 空间几何体的结构、表面积及体积 …… 96 / 286

题型1 空间几何体的结构特征

题型2 空间几何体的表(侧)面积

题型3 空间几何体的体积

易错点 计算组合体表面积时易忽视重叠部分

真题直击·[全国Ⅰ2026·10]空间动态问题,P114T20

真题直击·[全国Ⅰ2026·15]线面平行的判定、直线到平面的距离,P116T8

真题直击·[全国Ⅱ2026·5]棱台的体积,P113T5

目录 CONTENTS

第 2 节　空间点、线、面的位置关系 …… 98 / 288

第 3 节　直线、平面平行的判定与性质 …… 99 / 289

题型 1　线面平行的判定与性质
题型 2　面面平行的判定与性质
易错点　判断线面平行时忽略直线在平面内

第 4 节　直线、平面垂直的判定与性质 …… 101 / 291

题型 1　线面垂直的判定与性质
题型 2　面面垂直的判定与性质
易错点　判断线面垂直时忽视平面内两条直线需要相交

第 5 节　空间角和距离的求法 …… 103 / 293

题型 1　异面直线所成角
题型 2　线面角
题型 3　二面角与面面角
题型 4　空间距离
易错点　忽略对空间角取值范围的讨论

重难专题 13　球的切、接问题 …… 108 / 300

突破 1　外接球问题　/　突破 2　内切球问题　/　突破 3　棱切球问题

重难专题 14　截面、翻折问题 …… 109 / 302

突破 1　截面问题　/　突破 2　翻折问题

重难专题 15　动点、轨迹与探索性问题 …… 111 / 304

突破 1　动点问题　/　突破 2　轨迹问题　/　突破 3　探索性问题

真题综合测试 …… 113 / 306

章末综合测试 …… 117 / 314

真题直击 · [全国Ⅱ 2026 · 14] 四点共球问题，P114T18

真题直击 · [全国Ⅱ 2026 · 16] 线线垂直的证明、线面角正弦值的求解，P115T2

【更多资料关注公众号：瀚升学堂】

真题直击 · [天津 2026 · 5] 空间中线、面位置关系的判断，P114T11

学霸说 · 利用模型转化法求解正方体棱长的最大值，P108T7

学霸说 · 几何法判断动点的轨迹，P111T6

创新好题 · 新情境 · 冶炼铸铁背景下考查球的体积及正四棱台的高，P97T15

创新好题 · 新情境 · 《九章算术》背景下考查三棱锥的体积，P101T2

创新好题 · 新情境 · 《九章算术》背景下求异面直线所成角，P106T1

狂K重难点 30 · 空间角的求法，P410

狂K重难点 31 · 空间距离的求法，P411

狂K重难点 32 · 外接球问题，P412

狂K重难点 33 · 内切球找截面，P414

狂K重难点 34 · 翻折问题，P415

狂K重难点 35 · 空间动态问题，P416

第 9 章　直线与圆

第 1 节　直线与方程、圆的方程 …… 120 / 318

题型 1　直线的倾斜角与斜率、直线的方程
题型 2　两条直线的位置关系
题型 3　距离公式的应用
题型 4　直线的对称问题
题型 5　圆的方程
易错点 1　忽视两条平行直线不能重合
易错点 2　忽视直线截距可为 0

第 2 节　直线与圆、圆与圆的位置关系 …… 122 / 320

题型 1　直线与圆位置关系的判定
题型 2　直线与圆相交
题型 3　直线与圆相切
题型 4　直线与圆的最值问题
题型 5　圆与圆的位置关系
题型 6　公切线与公共弦
易错点　忽视圆的切线斜率不存在的情况

真题综合测试 …… 124 / 322

真题直击 · [全国Ⅰ 2026 · 11] 直线与圆的位置关系、弦长公式的应用，P124T5

真题直击 · [全国Ⅱ 2026 · 9] 圆的方程，直线与圆、圆与圆的位置关系，P124T6

学霸说 · 将线段的最小值转化为点到直线的距离，P120T10

创新好题 · 新思维 · 利用数形结合法求解直线倾斜角的范围，P120T3

创新好题 · 新思维 · 以两定点之间的距离为直径的圆的方程的两种求法，P121T18

狂K重难点 36 · 与圆有关的切线问题，P418

狂K重难点 37 · 与圆有关的最值问题，P420

CONTENTS 目录

第 10 章 圆锥曲线

第 1 节 椭圆 …… 125 / 324

题型 1 椭圆的定义及标准方程
题型 2 椭圆的几何性质与离心率
题型 3 椭圆中的焦点三角形问题
题型 4 直线与椭圆的位置关系
易错点 忽略对椭圆焦点位置的讨论

第 2 节 双曲线 …… 128 / 328

题型 1 双曲线的定义及标准方程
题型 2 双曲线的几何性质与离心率
题型 3 双曲线中的焦点三角形问题
题型 4 双曲线的渐近线方程
题型 5 直线与双曲线的位置关系
易错点 1 忽略对直线与渐近线平行的讨论
易错点 2 忽略直线与双曲线交点位置致误

第 3 节 抛物线 …… 131 / 331

题型 1 抛物线的定义及几何性质
题型 2 抛物线的焦半径与焦点弦问题
题型 3 直线与抛物线的位置关系
易错点 1 忽略讨论抛物线的开口方向
易错点 2 忽略直线与对称轴平行的讨论

重难专题 16 直线与圆锥曲线的位置关系 …… 133 / 334
突破 1 直线与圆锥曲线位置关系的判断 / 突破 2 弦长问题
突破 3 弦中点问题 / 突破 4 面积问题

重难专题 17 圆锥曲线中的范围与最值问题 …… 136 / 337

重难专题 18 圆锥曲线中的定点、定值与定直线问题 …… 137 / 338
突破 1 定点问题 / 突破 2 定值问题 / 突破 3 定直线问题

重难专题 19 圆锥曲线中的存在性问题 …… 139 / 340

压轴专题 3 圆锥曲线的综合与新定义问题 …… 140 / 340

真题综合测试 …… 141 / 341

章末综合测试 …… 147 / 353

真题直击 · [全国Ⅰ2026 · 5]抛物线的性质、两点之间的距离公式,P142T19
真题直击 · [全国Ⅰ2026 · 12]双曲线的离心率,P142T15
真题直击 · [全国Ⅰ2026 · 18]多种解法求解椭圆中的面积与夹角正切值问题,P145T7
真题直击 · [全国Ⅱ2026 · 4]双曲线的渐近线方程,P141T9
真题直击 · [全国Ⅱ2026 · 11]抛物线的方程与准线方程、直线与抛物线的位置关系,P142T20
真题直击 · [全国Ⅱ2026 · 18]椭圆中的动点的轨迹方程、探索性问题,P146T11
真题直击 · [天津 2026 · 9]结合正、余弦定理求双曲线的离心率,P141T10
真题直击 · [天津 2026 · 15]直线与抛物线的位置关系,P143T26
真题直击 · [天津 2026 · 18]斜率比值问题、直线与椭圆的位置关系,P143T1
真题直击 · [上海 2026 · 12]椭圆的离心率、椭圆的定义与几何性质,P141T6
狂 k 重难点 38 · 离心率问题,P421
狂 k 重难点 39 · 焦点三角形问题,P422
狂 k 重难点 40 · 椭圆和双曲线的第二定义与焦半径,P423
狂 k 重难点 41 · 抛物线的焦点弦问题,P424
狂 k 重难点 42 · 第三定义与斜率积,P425
狂 k 重难点 43 · 中点弦问题,P426
狂 k 重难点 44 · “设而不求”思想,P427

第 11 章 计数原理

第 1 节 两个计数原理、排列与组合 …… 150 / 357

题型 1 两个计数原理的简单应用
题型 2 排列问题
题型 3 组合问题
易错点 1 对是否需要考虑顺序理解不清
易错点 2 均匀分组易重复

真题直击 · [全国Ⅱ2026 · 6]分步乘法计数原理,P153T1
真题直击 · [天津 2026 · 11]求二项展开式中特定项的系数,P153T10
狂 k 重难点 45 · 特殊元素(位置)优先,P431
狂 k 重难点 46 · 捆绑法与插空法,P431
狂 k 重难点 47 · 定序问题,P432

目录 CONTENTS

第 2 节　二项式定理 …… 152 / 358

题型 1　展开式中的特定项及其系数
题型 2　展开式的系数和问题
题型 3　展开式系数的最值问题
易错点　混淆项的系数与二项式的系数

真题综合测试 …… 153 / 360

第 12 章　概率与统计

第 1 节　随机事件的概率、古典概型、相互独立事件及概率 …… 154 / 361

题型 1　对立事件、互斥事件与相互独立事件的辨析
题型 2　古典概型概率的求解
题型 3　对立事件、互斥事件与相互独立事件的概率求解

第 2 节　条件概率与全概率公式 …… 156 / 363

题型 1　条件概率及其应用
题型 2　全概率公式及贝叶斯公式

第 3 节　离散型随机变量及其分布列、期望与方差 …… 157 / 363

题型 1　分布列、期望与方差的性质
题型 2　求分布列、期望与方差
题型 3　决策问题

第 4 节　超几何分布、二项分布和正态分布 …… 159 / 365

题型 1　超几何分布
题型 2　二项分布
题型 3　正态分布
易错点　混淆二项分布与超几何分布

第 5 节　随机抽样与用样本估计总体 …… 161 / 366

题型 1　随机抽样
题型 2　样本数字特征
题型 3　统计图表
题型 4　频率分布直方图的应用
易错点　应用频率分布直方图时未乘组距

第 6 节　成对数据的统计分析 …… 163 / 367

题型 1　相关关系的判断
题型 2　回归分析
题型 3　独立性检验

压轴专题 4　概率统计与其他知识的综合 …… 165 / 368

真题综合测试 …… 167 / 369

章末综合测试 …… 172 / 373

• 答案及详细解析见 ☞ *P175–P374*
• 狂 K 重难点见 ☞ *P375–P438*

狂 K 重难点 48 · 隔板法解决相同元素分组问题，P432
狂 K 重难点 49 · 不同元素分组分配问题，P433
狂 K 重难点 50 · 二项展开式的系数和问题，P433
狂 K 重难点 51 · 二项式系数与展开式系数的最值问题，P434

真题直击 · [全国 I 2026 · 1] 中位数的概念，P168T12
真题直击 · [全国 I 2026 · 8] 新定义背景下的离散型随机变量的数学期望，P168T9
真题直击 · [全国 I 2026 · 17] 离散型随机变量与条件概率的综合问题，P169T2
真题直击 · [全国 II 2026 · 15] 频率分布直方图、二项分布的期望和方差，P170T4
真题直击 · [天津 2026 · 3] 经验回归方程的实际应用，P168T13
真题直击 · [天津 2026 · 13] 条件概率的求解，P168T8
创新好题 · 新风向 · 概率与立体几何的综合，P155T7
创新好题 · 新情境 · 人形机器人背景下的超几何分布问题，P159T1
创新好题 · 新风向 · 概率与不等式的综合，P165T1
创新好题 · 新风向 · 概率与导数的综合，P166T4
创新好题 · 新风向 · 概率与数列的综合，P174T15
狂 K 重难点 52 · 条件概率、乘法公式、全概率公式，P435
狂 K 重难点 53 · 超几何分布与二项分布，P436
狂 K 重难点 54 · 正态曲线的应用，P437
狂 K 重难点 55 · 概率统计与数列的综合问题，P438

第1章 集合与常用逻辑用语、不等式

全章串讲 错题本

第1节 集合

刷基础 ▶10分钟筑牢基础，速通题型 ▶答案 P175

题型1 ▸ 元素与集合、集合与集合的关系

1. 易 [河北衡水2026期中] 设 $M=\{x\mid x=6k-2,k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x\mid x=3k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，则 （ ）
A. $M\subseteq N$ B. $N\subseteq M$ C. $M=N$ D. $M\not\subseteq N$

2. 易 [广东部分校2026联考] 已知集合 $A=\{xy\mid x\in\{-2,1\},y\in\{-1,2\}\}$，则 A 的真子集个数为 （ ）
A. 1 B. 3 C. 7 D. 15

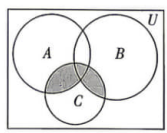
题型2 ▸ 集合的交、并、补运算

3. NEW 真题 易 [全国Ⅱ2026·2] 已知集合 $A=\{0,1,3,6,9\}$，$B=\{x\mid\sqrt{x}=x\}$，则 $A\cap B=$ （ ）
A. $\{0,1\}$ B. $\{3,6\}$
C. $\{0,1,9\}$ D. $\{0,3,9\}$

4. 易 [广东佛山顺德区2026二模] 设 $U=\{x\in\mathbf{N}\mid x<9\}$，$A=\{3,4,5,6,7\}$，则 $\complement_U A=$ （ ）
A. $\{1,2,8\}$ B. $\{0,1,2,8\}$
C. $\{1,2,8,9\}$ D. $\{0,1,2,8,9\}$

5. 易 [山东威海2026一模] 已知集合 $A=\{x\mid\log_2(x-1)<2\}$，$B=\{x\mid-1<x<6\}$，则 $A\cup B=$ （ ）
A. $(1,5)$ B. $(1,6)$
C. $(-1,5)$ D. $(-1,6)$

6. 中 [辽宁多校2026联考] 已知集合 A,B,C 是全集 U 的三个真子集，A,B,C 的关系如Venn图所示，则图中阴影部分表示的集合为 （ ）
A. $A\cap B\cap C$
B. $(A\cap C)\cup(B\cap C)$
C. $A\cap C\cap(\complement_U B)$
D. $A\cap[(\complement_U C)\cup B]$



题型3 ▸ 集合中的含参问题

7. 中 [湖北荆州2026质量检测] 集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{x\mid x<a\}$，若 $A\cap B=A$，则实数 a 的取值范围是 （ ）
A. $(-\infty,1)$
B. $(-\infty,1]$
C. $(3,+\infty)$
D. $[3,+\infty)$

见狂K P375

8. 易 [山西吕梁2026调研] 已知集合 $A=\{1,a,1-a^2\}$，$0\in A$，则 $a=$_____.

题型4 ▸ 容斥原理的应用

9. 新思维 数形结合 易 [湖南邵阳2026摸底检测] 某班班主任对全班女生进行了关于对唱歌、跳舞、书法是否有兴趣的问卷调查，经统计每位同学至少选择了一项，有21人喜欢唱歌，17人喜欢跳舞，10人喜欢书法，同时喜欢唱歌和跳舞的有12人，同时喜欢唱歌和书法的有6人，同时喜欢跳舞和书法的有5人，三种都喜欢的有2人，则该班女生人数为 （ ）
A. 27 B. 23 C. 25 D. 29

题型5 ▸ 集合新定义问题

10. 中 [安徽皖豫名校联盟2026月考] 定义集合 A 与 B 的差集为 $A-B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}$，已知集合 $P=\{x\mid x^2-3x+2\leqslant0\}$，$Q=\{x\mid a<x\leqslant a+4\}$. 若 $P-Q=\varnothing$，则实数 a 的取值范围是_____.

刷易错

易错点1 ▸ 代表元素混淆

11. 易 [江苏盐城2026期中(改编)] 若集合 $P=\{x\mid y=\sqrt{1-x}\}$，$Q=\{y\mid y=e^x\}$，则 $P\cap Q=$ （ ）
A. $[0,+\infty)$ B. $(-\infty,1]$
C. $(0,1)$ D. $(0,1]$

易错点2 ▸ 处理集合的包含关系问题时忽略空集、端点值取舍判断不清

12. 中 [东北三省一区八校联合体2026一模] 已知集合 $A=\left\{x\mid\dfrac{x+3}{x-2}\geqslant0\right\}$，$B=\{x\mid3p-2\leqslant x\leqslant2p-1\}$，$B\subseteq\complement_{\mathbf{R}}A$，则实数 p 的取值范围是_____.

第 2 节　常用逻辑用语

刷基础

▶15 分钟筑牢基础，速通题型　▶答案 P175

题型 1 ▸ 充分、必要条件

1. 易 [广东茂名 2026 综合测试]“$\ln a>\ln b$”是“$0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$”的　（　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

2. 易 [湖北宜昌 2026 二模]已知集合 $P=\{x\mid x(x-3)<0\}$，$Q=\{x\mid \log_2(x-1)<1\}$，则“$x\in P$”是“$x\in Q$”的　（　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

3. 易 [河南部分校 2026 联考]“$\sin\alpha=\sin\beta$”是“$\cos\alpha=\cos\beta$”的　（　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 中 [北京通州区 2026 摸底考]“$a\in(1,3)$”是“函数 $f(x)=\log_2 x-x+a$ 在 $(2,8)$ 上存在零点”的　（　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. 中 [江苏扬州 2026 期末]在正项等差数列 $\{a_n\}$ 中，记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则“$a_2=3a_1+2$”是“数列 $\{\sqrt{S_n+n}\}$ 是等差数列”的　（　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

6. 易 [河北部分校 2026 联考]若“$1<x<2$”是“$|x-m|<1$”的充分不必要条件，则实数 m 的取值范围为_____.

题型 2 ▸ 全称量词命题、存在量词命题

7. 易 [河南开封 2026 测试]已知命题 $p:\forall x\in(0,+\infty),e^x>x$，则　（　）

A. $\neg p:\exists x\notin(0,+\infty),e^x>x$

B. $\neg p:\forall x\in(0,+\infty),e^x\leqslant x$

C. $\neg p:\forall x\notin(0,+\infty),e^x>x$

D. $\neg p:\exists x\in(0,+\infty),e^x\leqslant x$

8. 易 [浙江宁波 2026 期末]已知命题 $p:\forall x\in(0,+\infty),x>\sin x$；命题 $q:\exists x>0,x=e^x$. 则下列说法正确的是　（　）

A. p 和 q 都是真命题

B. p 和 $\neg q$ 都是真命题

C. $\neg p$ 和 q 都是真命题

D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

9. 中 [广东佛山 S6 高质量发展联盟 2026 联考]若命题“$\exists x\in\mathbf{R},x^2-2x+m<0$”为假命题，则实数 m 的取值范围是　（　）

A. $(-\infty,1)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $(-\infty,1]$　　D. $[1,+\infty)$

10. 中 [山东菏泽 2026 期中]已知“$\exists x\in(0,1],mx^2-x\geqslant 0$”为真命题，则实数 m 的最小值为_____.

刷易错

易错点 ▸ 使用集合法解决充分、必要性问题时对包含关系判断不清

11. 易 [陕西西安高新一中 2026 五模(改编)]若“$\frac{x-4}{x+1}>0$”是“$x<a$”的必要不充分条件，则实数 a 的取值范围是　（　）

A. $(4,+\infty)$　　B. $(-\infty,4]$

C. $(-\infty,-1]$　　D. $(-\infty,-1)$

第3节 不等式的性质与一元二次不等式

刷基础

▶15分钟筑牢基础，速通题型 ▶答案 P176

题型1 ▸ 不等式的性质

1. 易 [广东汕头2026质量监测]已知$1<a<3,\frac{1}{4}<b<\frac{1}{2}$，则$\frac{a+b}{b}$的取值范围是 ( )

A. $(5,7)$　　B. $\left(\frac{5}{2},14\right)$

C. $(3,13)$　　D. $\left(\frac{5}{4},\frac{7}{2}\right)$

2. 易 [安徽A10联盟2026开学考](多选)已知$a<b<0,c>d>0$，则 ( )

A. $a-c>b-d$　　B. $ac<bd$

C. $a^2c>b^2d$　　D. $\frac{1}{a}+c>\frac{1}{b}+d$

3. 中 [山东济南2026一模](多选)已知实数a,b,c满足$a<b<c,ac<0$，则 ( )

A. $ab\leqslant bc$　　B. $|a+c|<|a-c|$

C. $\frac{1}{c-a}<\frac{1}{c-b}$　　D. $\frac{a}{c}\geqslant\frac{a+b}{c+b}(c+b\neq0)$

题型2 ▸ 解一元二次不等式

4. 易 [江西南昌2026一模]已知$f(x)=\begin{cases}2^{-x},x\leqslant-1,\\-x^2+4x+1,x>-1,\end{cases}$则不等式$f(x)<1$的解集为 ( )

A. $(-\infty,-1)$

B. $(4,+\infty)$

C. $(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$

D. $(-1,0)\cup(4,+\infty)$

5. 中 [吉林长春三校2026联考]若关于x的不等式$2ax^2-4x<ax-2$有且只有一个整数解，则实数a的取值范围是 ( )

A. $(1,2]$　　B. $[1,2)$

C. $(0,2)$　　D. $(0,2]$

6. 易 [河北NT20名校联合体2026质检]设p：$|x|<1$；q：$ax^2+(a-1)x-1<0(a\geqslant0)$. 若$p$是$q$的充分条件，则实数$a$的取值范围是_____.

题型3 ▸ 不等式恒成立(有解)问题

7. 中 [河北唐山一中2026月考]已知函数$f(x)=x|x-a|-2a^2$，若当$x>2$时，$f(x)>0$，则a的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,1]$　　B. $[-2,1]$

C. $[-1,2]$　　D. $[-1,+\infty)$

8. 较难 [浙江杭州二中2026期末]已知$a>0,b>0$，$\min\left\{a,\frac{15}{a+1}+2b,\frac{2}{b}\right\}=m$，则$m$的最大值为 ( )

A. 3　　B. 4

C. $3+2\sqrt{2}$　　D. $4+2\sqrt{2}$

9. 中 [辽宁部分校2026质量监测]若关于x的不等式$ax^2-2x-2a\leqslant0$在$[0,1]$上有解，则实数a的取值范围是_____.

刷易错

易错点1 ▸ 忽略对二次项系数等于0的讨论

10. 易 [江西师大附中2026测试]对于任意$x\in\mathbf{R}$，$\sqrt{mx^2+2mx+2}$都有意义，则m的取值范围是 ( )

A. $[2,+\infty)$　　B. $(0,2]$

C. $[0,2]$　　D. $[0,4]$

易错点2 ▸ 不等式恒成立与能成立的含义分辨不清

11. 中 [江苏扬州高邮2026调研]函数$y=[x]$称为高斯函数，其中$[x]$表示不超过实数x的最大整数，如$[1.2]=1,[-1.2]=-2$，若$\exists x\in\left[\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right]$，使得$[x]^2-m[x]+4>0$成立，则实数$m$的取值范围为 ( )

A. $(-\infty,4)$　　B. $\left(-\infty,\frac{13}{3}\right)$

C. $\left(-\infty,\frac{65}{14}\right)$　　D. $(-\infty,5)$

第4节　基本不等式

刷基础

▶20分钟筑牢基础，速通题型　▶答案 P178

题型1 ▸ 利用基本不等式求最值

1. 易 [安徽亳州2026期末] 已知 $a>0,b>0,2a+b=4$，则 $(a+1)(b+2)$ 的最大值为 (　　)

A. 16　　B. 8　　C. 4　　D. $2\sqrt{2}$

2. 易 [广东深圳外国语学校2026阶段性考试] 若 $\log_2(2x-y)=2$，则 $\frac{1}{9^x}+3^y$ 的最小值为 (　　)

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{2}{9}$　　C. $\frac{2}{27}$　　D. $\frac{2}{81}$

3. 新风向 模块融合 易 [安徽安庆2026二模] 已知等比数列 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，其公比 $q>0$，则 $\frac{2a_2+a_8}{a_5}$ 的最小值为 (　　)

A. 3　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. 易 [湖北孝感2026一模] 已知正实数 x,y 满足 $2^x\cdot 8^y=4^{xy}$，则 $3x+y$ 的最小值是 (　　)

A. 6
B. 8
C. 12
D. 16

见狂K P375

5. 中 [云南昆明一中2026诊断] 已知正实数 a,b 满足 $ab+2a+b=6$，则 ab 的最大值是 (　　)

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

6. 中 [湖南长沙长郡中学2026期末] 已知 $-1<x<\frac{5}{2}$，则 $\frac{3}{5-2x}+\frac{2}{3+3x}$ 的最小值为 (　　)

A. $\frac{13}{7}$
B. $\frac{25}{13}$
C. $\frac{25}{14}$
D. $\frac{25}{21}$

学霸有话说 P178

7. 新风向 模块融合 中 [广西贵港2026诊断检测] 已知 $m>0,n>0$，直线 $y=\frac{3}{e}x+2n$ 与曲线 $y=3\ln x-m+4$ 相切，则 $\frac{2}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值是 (　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. 中 [河南鹤壁高中2026测试] 若不等式 $(ax-1)(x-b)\geqslant 0$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则 $4a+b$ 的最小值为 (　　)

A. $2\sqrt{2}$　　B. 4
C. 5　　D. $4\sqrt{2}$

9. 中 [山东菏泽2026期末] (多选) 设 $a>1,b>1$，且 $ab=a+b$，则下列说法正确的是 (　　)

A. $a+2b$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$
B. a^2+b^2 的最小值为 8
C. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$
D. $\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}$ 无最小值

题型2 ▸ 重要不等式链

10. 中 [江西南昌2026一模] (多选) 已知 $a,b>0$，$a+b=1$，则下列选项中正确的有 (　　)

A. $\ln a>0$　　B. $2^b>1$
C. $\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\geqslant 16$　　D. $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$

11. 较难 [吉林四平一中2026模拟] (多选) 已知 $a>0,b>0,a^2+b^2-ab=1$，则下列不等式恒成立的是 (　　)

A. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2$　　B. $a+b\leqslant 2$
C. $a^3+b^3\leqslant 2$　　D. $0<b\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$

刷易错

易错点 ▸ 忽略基本不等式的使用前提

12. 中 [陕西部分校2026模拟(改编)] (多选) 下列不等式一定成立的是 (　　)

A. $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\geqslant 2$　　B. $\sin x+\frac{1}{\sin x}\geqslant 2$
C. $x^2+\frac{4}{x^2+3}\geqslant\frac{4}{3}$　　D. $\ln\left(x^2+\frac{1}{2}\right)>\ln x$

真题综合测试

刷真题

▶直击真题，洞悉考向　▶答案 P179

考点1　集合

1. NEW [天津 2026·1]已知全集 $U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，集合 $A=\{-1,0,1,3\}$，集合 $B=\{-2,0,1\}$，则 $(\complement_U A)\cup B=$ (　)
A. $\{-2\}$　　B. $\{-2,2\}$
C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{-2,0,1,2\}$

2. [全国一 2025·2]已知集合 $U=\{x|x$ 是小于9的正整数$\}$，$A=\{1,3,5\}$，则 $\complement_U A$ 中元素的个数为 (　)
A. 0　　B. 3　　C. 5　　D. 8

3. [全国二 2025·3]已知集合 $A=\{-4,0,1,2,8\}$，$B=\{x|x^3=x\}$，则 $A\cap B=$ (　)
A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{1,2,8\}$
C. $\{2,8\}$　　D. $\{0,1\}$

4. [北京 2025·1]已知集合 $M=\{x|2x-1>5\}$，$N=\{1,2,3\}$，则 $M\cap N=$ (　)
A. $\{1,2,3\}$　　B. $\{2,3\}$
C. $\{3\}$　　D. $\varnothing$

5. [全国甲(理)2024·2]已知集合 $A=\{1,2,3,4,5,9\}$，$B=\{x|\sqrt{x}\in A\}$，则 $\complement_A(A\cap B)=$ (　)
A. $\{1,4,9\}$　　B. $\{3,4,9\}$
C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{2,3,5\}$

6. [全国新课标Ⅰ2023·1]已知集合 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$，$N=\{x|x^2-x-6\geqslant 0\}$，则 $M\cap N=$ (　)
A. $\{-2,-1,0,1\}$　　B. $\{0,1,2\}$
C. $\{-2\}$　　D. $\{2\}$

7. [全国新课标Ⅱ2023·2]设集合 $A=\{0,-a\}$，$B=\{1,a-2,2a-2\}$，若 $A\subseteq B$，则 $a=$ (　)
A. 2　　B. 1
C. $\frac{2}{3}$　　D. -1

8. [全国乙(理)2023·2]设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $M=\{x|x<1\}$，$N=\{x|-1<x<2\}$，则 $\{x|x\geqslant 2\}=$ (　)
A. $\complement_U(M\cup N)$　　B. $N\cup\complement_U M$
C. $\complement_U(M\cap N)$　　D. $M\cup\complement_U N$

9. [全国甲(理)2023·1]设全集 $U=\mathbf{Z}$，集合 $M=\{x|x=3k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x|x=3k+2,k\in\mathbf{Z}\}$，则 $\complement_U(M\cup N)=$ (　)
A. $\{x|x=3k,k\in\mathbf{Z}\}$
B. $\{x|x=3k-1,k\in\mathbf{Z}\}$
C. $\{x|x=3k-2,k\in\mathbf{Z}\}$
D. $\varnothing$

10. [全国新高考Ⅰ2022·1]若集合 $M=\{x|\sqrt{x}<4\}$，$N=\{x|3x\geqslant 1\}$，则 $M\cap N=$ (　)
A. $\{x|0\leqslant x<2\}$　　B. $\left\{x\middle|\frac{1}{3}\leqslant x<2\right\}$
C. $\{x|3\leqslant x<16\}$　　D. $\left\{x\middle|\frac{1}{3}\leqslant x<16\right\}$

11. [全国新高考Ⅱ2022·1]已知集合 $A=\{-1,1,2,4\}$，$B=\{x||x-1|\leqslant 1\}$，则 $A\cap B=$ (　)
A. $\{-1,2\}$　　B. $\{1,2\}$
C. $\{1,4\}$　　D. $\{-1,4\}$

12. [全国乙(理)2022·1]设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，集合 M 满足 $\complement_U M=\{1,3\}$，则 (　)
A. $2\in M$　　B. $3\in M$
C. $4\notin M$　　D. $5\notin M$

13. [全国乙(理)2021·2]已知集合 $S=\{s|s=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$T=\{t|t=4n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，则 $S\cap T=$ (　)
A. $\varnothing$　　B. S
C. T　　D. $\mathbf{Z}$

考点2　常用逻辑用语

14. NEW [天津 2026·2]设 $x\in\mathbf{R}$，则“$x<0$”是“$x^2-3x>0$”的 (　)
A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

15. [北京 2025·7]已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D，则“$f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$”是“对任意 $M\in\mathbf{R}$，存在 $x_0\in D$，使得 $|f(x_0)|>M$”的 (　)
A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

高考必刷题

理想树

答案及详细解析

扫码对答案

- 1205 道题逐一详析，让你发现每个解题步骤都有迹可循；
- 327 个批注式解析，帮你定位解题关键，一眼抓住解题重点；
- 232 个实用栏目，学霸说、易错警示、刷有所得等，助你避开答题陷阱、全面拓宽解题思路。

数学

附

翻开即得 快速对答案

第1章　集合与常用逻辑用语、不等式

第1节　集合

刷基础

1. A　**考查点**▸判断集合与集合的关系

【解析】由题知，$M=\{x\mid x=3(2k-1)+1,k\in\mathbf{Z}\}$，当 $k\in\mathbf{Z}$ 时，$2k-1$ 为奇数（提示：将两个集合中的等式关系转化为相同的结构），而 $N=\{x\mid x=3k+1,k\in\mathbf{Z}\}$ 中 $k\in\mathbf{Z}$，故 $M\subseteq N$. 故选 A.

2. C　**考查点**▸集合的真子集个数

【解析】因为 $x\in\{-2,1\}$，$y\in\{-1,2\}$，所以 xy 的值有 $(-2)\times(-1)=2$，$(-2)\times2=-4$，$1\times(-1)=-1$，$1\times2=2$，由集合中元素的互异性得 $A=\{-4,-1,2\}$，所以其真子集个数为 $2^3-1=7$. 故选 C.

易错点

3. A　**命题点**▸集合的交集运算

【解析】由 $\sqrt{x}=x$，得 $x=x^2$ 且 $x\geqslant0$，即 $x=0$ 或 $x=1$，所以 $B=\{0,1\}$. 又 $A=\{0,1,3,6,9\}$，所以 $A\cap B=\{0,1\}$，故选 A.

4. B　**考查点**▸集合的补集运算

【解析】依题意，$U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$，而 $A=\{3,4,5,6,7\}$，所以 $\complement_U A=\{0,1,2,8\}$. 故选 B.

5. D　**考查点**▸集合的并集运算

【解析】由 $\log_2(x-1)<2$，可得 $0<x-1<4$（易错：易忽略真数大于0），解得 $1<x<5$，即 $A=(1,5)$，又 $B=\{x\mid-1<x<6\}=(-1,6)$，所以 $A\cup B=(-1,6)$. 故选 D.

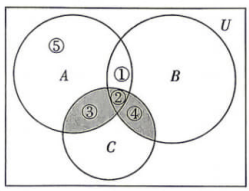
6. B　**考查点**▸集合运算、Venn 图的应用

【解析】对于 A，$A\cap B\cap C$ 表示图中②对应的部分，故 A 错误；

对于 B，$(A\cap C)\cup(B\cap C)$ 表示图中②③④对应的部分，即阴影部分，故 B 正确；

对于 C，$A\cap C\cap(\complement_U B)$ 表示图中③对应的部分，故 C 错误；

对于 D，$A\cap[(\complement_U C)\cup B]$ 表示图中①②⑤对应的部分，故 D 错误. 故选 B.



7. C　**考查点**▸根据集合与集合的关系求参数范围

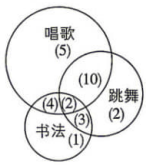
【解析】因为 $A\cap B=A$，所以 $A\subseteq B$，又集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{x\mid x<a\}$，所以 $a>3$，所以实数 a 的取值范围是 $(3,+\infty)$. 故选 C.

8. −1　**考查点**▸根据元素与集合的关系求参数的值

【解析】因为 $0\in A$，所以 $a=0$ 或 $1-a^2=0$，即 $a=0$ 或 $a=\pm1$，由集合中元素的互异性知 $a\neq1$ 且 $a\neq0$，所以 $a=-1$.

9. A　**考查点**▸Venn 图、容斥原理

【解析】作出 Venn 图，如图所示，可知 5 人只喜欢唱歌，2 人只喜欢跳舞，1 人只喜欢书法，同时喜欢唱歌和跳舞但不喜欢书法的有 10 人，同时喜欢唱歌和书法但不喜欢跳舞的有 4 人，同时喜欢跳舞和书法但不喜欢唱歌的有 3 人，三种都喜欢的有 2 人，则该班女生人数为 5+2+1+10+4+3+2=27. 故选 A.



一题多解　设该班女生人数为 n，将喜欢唱歌、跳舞、书法的女生分别用集合 A，B，C 表示，则 $\mathrm{card}(A)=21$，$\mathrm{card}(B)=17$，$\mathrm{card}(C)=10$，$\mathrm{card}(A\cap B)=12$，$\mathrm{card}(A\cap C)=6$，$\mathrm{card}(B\cap C)=5$，$\mathrm{card}(A\cap B\cap C)=2$.

由容斥原理得 $n=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)+\mathrm{card}(C)-\mathrm{card}(A\cap B)-\mathrm{card}(A\cap C)-\mathrm{card}(B\cap C)+\mathrm{card}(A\cap B\cap C)=21+17+10-12-6-5+2=27$，故选 A.

10. $[-2,1)$　**考查点**▸集合的差集

【解析】由 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)\leqslant0$，解得 $1\leqslant x\leqslant2$，即集合 $P=\{x\mid1\leqslant x\leqslant2\}$，由 $P-Q=\varnothing$ 得 $P\subseteq Q$，所以 $\begin{cases}a+4\geqslant2,\\a<1,\end{cases}$ 解得 $-2\leqslant a<1$，即实数 a 的取值范围是 $[-2,1)$.

关键点

刷易错

11. D　【解析】由题可知，$P=\{x\mid x\leqslant1\}$，$Q=\{y\mid y>0\}$，所以 $P\cap Q=\{x\mid0<x\leqslant1\}=(0,1]$，故选 D.

易错点

易错警示　本题容易忽略集合 Q 的代表元素为 y，即 $Q=\{y\mid y>0\}$，而不是 $Q=\mathbf{R}$，若认为 $Q=\mathbf{R}$，则会错选 B. 在研究集合的有关问题时，一定要弄清楚集合 $\{x\in A\mid p(x)\}$ 的代表元素，而且需要注意集合中代表元素的范围.

12. $\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$　【解析】因为 $A=\left\{x\,\middle|\,\frac{x+3}{x-2}\geqslant0\right\}=\{x\mid x\leqslant-3\text{ 或 }x>2\}$，所以 $\complement_{\mathbf{R}}A=\{x\mid-3<x\leqslant2\}$.

当 $B=\varnothing$ 时，$3p-2>2p-1$，即 $p>1$，符合题意；

易错点

当 $B\neq\varnothing$ 时，由于 $B\subseteq\complement_{\mathbf{R}}A$，所以有 $\begin{cases}3p-2\leqslant2p-1,\\3p-2>-3,\\2p-1\leqslant2,\end{cases}$ 解得 $-\frac{1}{3}<p\leqslant1$.

易错点

综上，实数 p 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$.

易错警示　本题的易错点有2个：

(1) 在处理“$B\subseteq\complement_{\mathbf{R}}A$”条件时，容易忽略集合 $B=\varnothing$ 的情况.

(2) 当 $B\neq\varnothing$ 时，端点值是否能取到判断不清. 在处理与不等式有关的集合的关系问题时，一定要注意端点值是否能取到，可单独验证端点值是否满足题意；若两个集合有包含关系，则可以使用口诀“外空内实不取等”，即利用数轴表示两个集合，外面的是空心，里面的为实心，则等号取不到，其余的全部取等.

第2节　常用逻辑用语

刷基础

1. C　**考查点**▸解不等式，充分、必要条件的判断

【解析】若 $\ln a>\ln b$，根据对数函数的单调性可知 $a>b>0$，则 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，即充分性成立；若 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，可得 $a>b>0$，则 $\ln a>\ln b$，即必要性成立. 故“$\ln a>\ln b$”是“$0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$”的充要条件. 故选 C.

2. B　**考查点**▸一元二次不等式，充分、必要条件

【解析】由题意知，集合 $P=\{x\mid x(x-3)<0\}=\{x\mid0<x<3\}$，

集合 $Q=\{x\mid\log_2(x-1)<1\}=\{x\mid1<x<3\}$，所以 $x\in Q\Rightarrow x\in P$，$x\in P\not\Rightarrow x\in Q$，

所以“$x\in P$”是“$x\in Q$”的必要不充分条件.

高考
必刷题

理想树

狂K重难点

视频讲解

- 精讲 55 个高考核心重难题型，构建解题模型，打通同类答题套路；
- 配 900 + 分钟视频精讲，名师逐题拆解，手把手梳理解题逻辑；
- 更有必刷打卡、难易度标识，学练即时衔接，针对性突破重难点。



数学

目录 contents

页码

第 1 章　集合与常用逻辑用语、不等式

重难点 1　集合的含参问题 …… 375
重难点 2　基本不等式的变形技巧 …… 375

第 2 章　函数及其性质

重难点 3　函数的单调性与奇偶性 …… 377
重难点 4　函数的周期性与图象的对称性 …… 378
重难点 5　抽象函数问题 …… 379
重难点 6　分段函数问题 …… 380
重难点 7　复合函数问题 …… 381

第 3 章　导数及其应用

重难点 8　公切线与多切线问题 …… 382
重难点 9　利用导数研究函数的单调性、极值与最值 …… 383
重难点 10　利用导数研究函数零点问题 …… 384
重难点 11　三次函数问题 …… 386
重难点 12　隐零点问题 …… 387
重难点 13　利用导数研究不等式恒成立问题 … 388
重难点 14　构造函数比较大小 …… 390
重难点 15　逆向构造法的应用 …… 390
重难点 16　同构问题 …… 391
重难点 17　放缩技巧 …… 392
重难点 18　双变量问题 …… 393
重难点 19　极值点偏移问题 …… 394

第 4 章　三角函数

重难点 20　三角函数图象与性质的综合应用 … 397
重难点 21　三角函数中 ω 的取值问题 …… 398

第 5 章　解三角形

重难点 22　三角形中的边角互化 …… 400
重难点 23　解三角形中的最值问题 …… 401

第 6 章　平面向量、复数

重难点 24　平面向量的数量积问题 …… 402
重难点 25　复数的几何意义 …… 403

第 7 章　数列

重难点 26　数列求通项的方法 …… 404
重难点 27　数列求和的方法 …… 405
重难点 28　数列奇偶项问题 …… 407
重难点 29　数列不等式的放缩问题 …… 409

第 8 章　立体几何

重难点 30　空间角的求法 …… 410
重难点 31　空间距离的求法 …… 411
重难点 32　外接球问题 …… 412
重难点 33　内切球找截面 …… 414
重难点 34　翻折问题 …… 415
重难点 35　空间动态问题 …… 416

第 9 章　直线与圆

重难点 36　与圆有关的切线问题 …… 418
重难点 37　与圆有关的最值问题 …… 420

第 10 章　圆锥曲线

重难点 38　离心率问题 …… 421
重难点 39　焦点三角形问题 …… 422
重难点 40　椭圆和双曲线的第二定义与焦半径 … 423
重难点 41　抛物线的焦点弦问题 …… 424
重难点 42　第三定义与斜率积 …… 425
重难点 43　中点弦问题 …… 426
重难点 44　“设而不求”思想 …… 427

第 11 章　计数原理

重难点 45　特殊元素（位置）优先 …… 431
重难点 46　捆绑法与插空法 …… 431
重难点 47　定序问题 …… 432
重难点 48　隔板法解决相同元素分组问题 …… 432
重难点 49　不同元素分组分配问题 …… 433
重难点 50　二项展开式的系数和问题 …… 433
重难点 51　二项式系数与展开式系数的最值问题 …… 434

第 12 章　概率与统计

重难点 52　条件概率、乘法公式、全概率公式　435
重难点 53　超几何分布与二项分布 …… 436
重难点 54　正态曲线的应用 …… 437
重难点 55　概率统计与数列的综合问题 …… 438

第1章　集合与常用逻辑用语、不等式

重难点1▸集合的含参问题

博主伴学 扫码获取

必刷打卡 P1T7~8　必考度:20%　难度:入门

对于离散型集合,通常利用集合的确定性求出参数所有可能的取值,再将参数代回集合,利用互异性进行检验.

对于连续型集合,通常利用数轴列出端点的大小关系,解不等式(组)求得参数范围. 注意空集是任何集合的子集,解题时注意对集合是否为空集进行讨论.

1. 集合间包含关系的常见给出形式

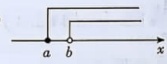
$B\subseteq A\Leftrightarrow A\cap B=B\Leftrightarrow A\cup B=A\Leftrightarrow(\complement_U A)\cap B=\varnothing\Leftrightarrow(\complement_U B)\cup A=U$($U$ 为全集).

2. 端点能否取等的判断

以 $A=\{x|x\geqslant a\}$,$B=\{x|x>b\}$,且 $B\subseteq A$,求 b 的取值范围为例.

(1)代入验证法:假设等号能取到,验证是否符合题意. 当 $b=a$ 时,$B\subseteq A$,符合题意,所以 b 的取值范围为 $[a,+\infty)$.

(2)数轴法:将集合在同一数轴上表示出来,由图分析端点取等时是否符合题意. 当 b 与 a 重合时,$B\subseteq A$,符合题意,所以 b 的取值范围为 $[a,+\infty)$.



例1 离散型 已知集合 $A=\{1,3,a^2\}$,$B=\{1,a+2\}$,若 $A\cap B=B$,则 $a=$(　　)

A. 1　　B. −1　　C. 2　　D. −2

解析 由 $A\cap B=B$ 知 $B\subseteq A$,由确定性知,$a+2=3$ 或 $a+2=a^2$,解得 $a=1$ 或 $a=-1$ 或 $a=2$. 当 $a=1$ 时,$A=\{1,3,1\}$,不满足集合中元素的互异性,舍去;当 $a=-1$ 时,$A=\{1,3,1\}$,且 $B=\{1,1\}$,不满足集合中元素的互异性,舍去;当 $a=2$ 时,$A=\{1,3,4\}$,$B=\{1,4\}$,符合题意. 综上,$a=2$.

答案 C

例2 连续型 已知集合 $A=\{x|-2<x\leqslant 5\}$,$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$ 且 $A\cup B=A$,则实数 m 的取值范围是_____.

解析 由 $A\cup B=A$ 知 $B\subseteq A$.

若 $B=\varnothing$,则 $2m-1<m+1$,解得 $m<2$;

易错 容易漏掉 $B=\varnothing$ 的情况

若 $B\neq\varnothing$,则 $m\geqslant 2$,用如图所示的数轴表示 $B\subseteq A$,可知 $\begin{cases}m\geqslant 2,\\2m-1\leqslant 5,\\m+1>-2,\end{cases}$ 解得 $2\leqslant m\leqslant 3$.

易错 注意端点处能否取等,也可用代入验证法判断

综上,m 的取值范围是 $(-\infty,3]$.



答案 $(-\infty,3]$

重难点2▸基本不等式的变形技巧

博主伴学 扫码获取

必刷打卡 P4T4,T6　必考度:60%　难度:适中

基本不等式是高中数学中的重要工具,其核心公式为 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}\,(a>0,b>0)$,当且仅当 $a=b$ 时取等号. 其核心题型主要有利用基本不等式求最值(和定积最大、积定和最小)、证明不等式、求参数范围及在实际问题中的应用. 解题的关键是构造“一正、二定、三相等”的条件,并通过配凑、换元、常数代换等技巧将目标式转化为可应用基本不等式的形式.

例3 直接用基本不等式 [天津 2026·7] $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{4}{x}\right)$ 的最小值为(　　)

A. 10　　B. 9　　C. 8　　D. 6

题干特征:积定和最小

解析 $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{4}{x}\right)=x^2+\frac{4}{x^2}+5\geqslant 2\sqrt{x^2\cdot\frac{4}{x^2}}+5=9$，当且仅当 $x^2=\frac{4}{x^2}$，即 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，等号成立，故 $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{4}{x}\right)$ 的最小值为 9.

答案 B

例 4 配凑法 已知 $x>1$. ①求 $x+\frac{1}{x-1}$ 的最小值；②求 $x(5-2x)$ 的最大值.

解析 ①$x+\frac{1}{x-1}=x-1+\frac{1}{x-1}+1\geqslant 2+1=3$，当且仅当 $x-1=\frac{1}{x-1}$，即 $x=2$ 时取等号，故所求最小值为 3.

②$x(5-2x)=\frac{1}{2}\cdot 2x(5-2x)\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2x+5-2x}{2}\right)^2=\frac{25}{8}$，当且仅当 $2x=5-2x$，即 $x=\frac{5}{4}$ 时取等号，故所求最大值为 $\frac{25}{8}$.

例 5 “1”的代换 已知 $x>0,y>0,x+2y=2$，求 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值.

解析 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\cdot 2\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{2}(x+2y)\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{2}\left(2+2+\frac{x}{y}+\frac{4y}{x}\right)\geqslant\frac{1}{2}\times(4+2\sqrt{4})=4$，当且仅当 $\frac{x}{y}=\frac{4y}{x}$，即 $x=1,y=\frac{1}{2}$ 时取等号，故所求最小值为 4.

例 6 消元法 已知 $x>0,y>0,xy+2x+y=14$，求 $2x+y$ 的最小值.

解析 由已知得 $y=\frac{14-2x}{x+1}$，则 $2x+y=2x+\frac{14-2(x+1)+2}{x+1}=2(x+1)-2+\frac{16}{x+1}-2\geqslant 2\sqrt{2\times 16}-4=8\sqrt{2}-4$，当且仅当 $2(x+1)=\frac{16}{x+1}$，即 $x=2\sqrt{2}-1,y=4\sqrt{2}-2$ 时取等号，故所求最小值为 $8\sqrt{2}-4$.

例 7 换元法 已知 $x^2+xy-6y^2=5$，求 $x^2+4xy+8y^2$ 的最小值.

解析 $x^2+xy-6y^2=(x+3y)(x-2y)=5$，令 $x+3y=a,x-2y=b$，则 $ab=5$，$x=\frac{2a+3b}{5}$，$y=\frac{a-b}{5}$，于是 $x^2+4xy+8y^2=\frac{4a^2+b^2}{5}\geqslant\frac{4ab}{5}=4$，当且仅当 $4a^2=b^2$，即 $b=2a$，即 $\begin{cases}a=\frac{\sqrt{10}}{2},\\ b=\sqrt{10}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-\frac{\sqrt{10}}{2},\\ b=-\sqrt{10}\end{cases}$ 时取等号，此时 $\begin{cases}x=\frac{4\sqrt{10}}{5},\\ y=-\frac{\sqrt{10}}{10}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{4\sqrt{10}}{5},\\ y=\frac{\sqrt{10}}{10},\end{cases}$

故 $x^2+4xy+8y^2$ 的最小值为 4.

例 8 多次使用基本不等式 已知 $a>0,c>0,a+c=2b$，求 $\frac{1}{a}+\frac{4}{c}+b$ 的最小值.

解析 由题可知 $\frac{a+c}{2b}=1$，则 $\frac{1}{a}+\frac{4}{c}=\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{c}\right)\cdot\frac{a+c}{2b}=\frac{1}{2b}\left(1+\frac{c}{a}+\frac{4a}{c}+4\right)$，由基本不等式可知 $\frac{c}{a}+\frac{4a}{c}\geqslant 2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{4a}{c}}=4$，当且仅当 $\frac{c}{a}=\frac{4a}{c}$，即 $c=2a=\frac{4b}{3}$ 时取等号，则 $\frac{1}{2b}\left(5+\frac{c}{a}+\frac{4a}{c}\right)\geqslant\frac{9}{2b}$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{4}{c}+b\geqslant\frac{9}{2b}+b\geqslant 2\sqrt{\frac{9}{2b}\cdot b}=3\sqrt{2}$，当且仅当 $b=\frac{9}{2b}$，即 $b=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时取等号.

综上所述，当 $a=\sqrt{2},b=\frac{3\sqrt{2}}{2},c=2\sqrt{2}$ 时，$\frac{1}{a}+\frac{4}{c}+b$ 取得最小值 $3\sqrt{2}$.

注意：直接使用基本不等式时注意“一正”这一条件

题干特征：求形如 $ax+\frac{c}{ax-b}$ 或 $ax(b-cx)$ 的最值

解题方法：配凑项将 $ax+\frac{c}{ax-b}$ 构造出积为定值的形式，配凑系数将 $ax(b-cx)$ 构造出和为定值的形式

题干特征：已知 $ax+by=c$，求形如 $\frac{d}{mx}+\frac{e}{ny}$ 的最值或已知 $\frac{d}{mx}+\frac{e}{ny}=c$ 求形如 $ax+by$ 的最值

解题方法：将已知等式两边同时除以 c 后代入目标式，使目标式出现积为定值的形式

题干特征：已知 $axy+bx+cy=d$，求形如 $mx+ny$ 的最值

解题方法：将已知等式变形，用一个变量表示另一个变量，代入消元，转化为单变量问题

题干特征：直接配凑困难、需要消去根号或高次

解题方法：将已知等式进行因式分解，分别令两个因式为新元，得到积为定值的形式，并用新元反解出旧元代入目标式，再求解

题干特征：代数式为多部分之和（或积）

解题方法：①明确每一步放缩的方向，确保每次应用基本不等式时都是朝着目标求解（求最大值时用“$\leqslant$”，求最小值时用“$\geqslant$”）；②分别写出每次取等的条件，最终必须存在一组值同时满足所有条件

博主作学扫码获取

重难点 3 ▸ 函数的单调性与奇偶性

必刷打卡 P8T2，P10T1　必考度：80%　难度：适中

1. 利用函数单调性求参

根据函数的单调性构造含参数的方程(组)或不等式(组)进行求解，或先得到函数图象的升降情况，再结合函数图象的其他特征求解，另外还要注意函数定义域对自变量及单调区间的限制.

2. 利用函数奇偶性求参

(1)定义法：①奇(偶)函数的定义域关于原点对称；②奇函数$\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$，偶函数$\Leftrightarrow f(-x)=f(x)$.

(2)特殊值法：选择一对相反数代入函数表达式，结合奇偶性，即可快解参数值，或初步判断参数情况. 特别地，如果奇函数$f(x)$在原点处有定义，则$f(0)=0$. 注意使用特殊值法求得参数值后，需要代回检验.

(3)性质法：可以将函数中含参部分“拆”出来，先判断不含参部分的奇偶性，再利用如下性质讨论参数：奇±奇=奇，偶±偶=偶，奇×奇=偶，偶×偶=偶，奇×偶=奇.

3. 综合利用单调性和奇偶性解不等式

对于在区间I上单调递增(减)的函数$f(x)$，$\forall x_1,x_2\in I,x_1<x_2$等价于$f(x_1)<f(x_2)$($f(x_1)>f(x_2)$)，由此可以去掉外壳“$f$”，转化为有关$x_1,x_2$的不等式.

对于还涉及奇偶性的题目，首先判断部分区间上函数的单调性，然后根据奇偶性得到其关于原点对称的区间上函数的单调性，再解不等式.

(1)奇函数在关于原点对称的两区间上具有相同的单调性，可以直接利用单调性去掉外壳“f”；

(2)偶函数在关于原点对称的两区间上具有相反的单调性，可以直接去掉外壳“f”，转化为含绝对值的不等式.

例 1 利用函数的奇偶性求参数的值 [全国新课标Ⅱ 2023·4]若$f(x)=(x+a)\ln\dfrac{2x-1}{2x+1}$为偶函数，则$a=$(　　)

A. -1　　B. 0　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1

解析 方法一(定义法)：由$\dfrac{2x-1}{2x+1}>0$得$x<-\dfrac{1}{2}$或$x>\dfrac{1}{2}$，故$f(x)$的定义域为$\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

因为$f(x)$是偶函数，所以$f(-x)=f(x)$，即$(-x+a)\ln\dfrac{-2x-1}{-2x+1}=(-x+a)\ln\dfrac{2x+1}{2x-1}=(x+a)\ln\dfrac{2x-1}{2x+1}$，则$(x-a)\ln\dfrac{2x-1}{2x+1}=(x+a)\ln\dfrac{2x-1}{2x+1}$，又$\ln\dfrac{2x-1}{2x+1}\neq0$，所以$x-a=x+a$恒成立，故$a=0$.

方法二(性质法)：由$\dfrac{2x-1}{2x+1}>0$得$x<-\dfrac{1}{2}$或$x>\dfrac{1}{2}$，故$f(x)$的定义域为$\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

令$h(x)=x+a$，$g(x)=\ln\dfrac{2x-1}{2x+1}$，$g(x)$的定义域为$\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，因为$g(-x)=\ln\dfrac{-2x-1}{-2x+1}=\ln\dfrac{2x+1}{2x-1}=\ln\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{-1}=-g(x)$，所以$g(x)$为奇函数，又因为$f(x)$是偶函数，所以$h(x)=x+a$为奇函数，易得$a=0$.

答案 B

例 2 利用函数的单调性和奇偶性解不等式 已知$f(x)=\ln(1+x)+\ln(1-x)$，若$f(2a-1)<f(-a)$，则实数a的取值范围是_____.

解析 令$\begin{cases}1+x>0,\\1-x>0,\end{cases}$得$f(x)$的定义域为$(-1,1)$. $f(x)=\ln(1+x)+\ln(1-x)=\ln[(1+x)(1-x)]=\ln(1-x^2)$，且$f(-x)=\ln[1-(-x)^2]=\ln(1-x^2)=f(x)$，所以$f(x)$为偶函数.

令$t=1-x^2$，$x\in[0,1)$，$t=1-x^2$在$[0,1)$上单调递减. 又$y=\ln t$在定义域上单调递增，所以$f(x)$在$[0,1)$上单调递减.

因为$f(x)$为偶函数，所以不等式$f(2a-1)<f(-a)$等价于$f(|2a-1|)<f(|-a|)$，则$\begin{cases}-1<2a-1<1,\\-1<-a<1,\\|2a-1|>|-a|,\end{cases}$解得$0<a<\dfrac{1}{3}$.

提示 注意函数定义域的限制

答案 $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$

博主伴学 扫码获取

重难点4▸函数的周期性与图象的对称性

必刷打卡 P8T11,P9T14,P10T2 必考度:60% 难度:适中

函数的周期性与图象的对称性的问题一般在选填题考查,我们要能够在题干中提取关键信息,快速判断函数的周期、函数图象的对称轴或对称中心,以下为判断的一些常用结论及方法.

1. 函数的周期性

已知 $a>0$ 且 a 为常数,函数 $y=f(x)$ 对定义域内任一实数 x 满足:

(1)若 $f(x)=f(x+a)$,则 $f(x)$ 的周期 $T=a$.

(2)若 $f(x+a)=-f(x)$ 或 $f(x+a)=\pm\dfrac{1}{f(x)}$ 或 $f(x+a)=f(x-a)$ 或 $f(x+a)=\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}(f(x)\neq-1)$,则 $f(x)$ 的周期 $T=2a$.

(3)若 $f(a+x)=f(b+x)(a\neq b)$,则 $f(x)$ 的周期 $T=|b-a|$.

(4)若 $f(a+x)=-f(b+x)(a\neq b)$,则 $f(x)$ 的周期 $T=2|b-a|$.

2. 函数图象的对称性

关于轴对称	$f(a+x)=f(b-x)\Leftrightarrow y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{(a+x)+(b-x)}{2}=\dfrac{a+b}{2}$ 对称. (1)推论1:$f(a+x)=f(a-x)\Leftrightarrow y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称. (2)推论2:$f(x)=f(2a-x)\Leftrightarrow y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称. (3)推论3:$f(-x)=f(2a+x)\Leftrightarrow y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称
关于点对称	$f(a+x)+f(b-x)=2c\Leftrightarrow y=f(x)$ 的图象关于点 $\left(\dfrac{a+b}{2},c\right)$ 对称. (1)推论1:$f(a+x)+f(a-x)=2b\Leftrightarrow y=f(x)$ 的图象关于点 (a,b) 对称. (2)推论2:$f(x)+f(2a-x)=2b\Leftrightarrow y=f(x)$ 的图象关于点 (a,b) 对称. (3)推论3:$f(-x)+f(2a+x)=2b\Leftrightarrow y=f(x)$ 的图象关于点 (a,b) 对称

3. 双对称求周期

(1)**由两条对称轴求周期**:若函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 和 $x=b(a\neq b)$ 对称,则函数 $f(x)$ 为周期函数,且 $2|a-b|$ 为函数 $f(x)$ 的一个周期.

特别地,偶函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a(a\neq0)$ 对称,则函数 $f(x)$ 为周期函数,且 $2|a|$ 为函数 $f(x)$ 的一个周期.

(2)**由两个对称中心求周期**:若函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(a,0)$ 和 $(b,0)(a\neq b)$ 对称,则函数 $f(x)$ 为周期函数,且 $2|a-b|$ 为函数 $f(x)$ 的一个周期.

特别地,奇函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(a,0)(a\neq0)$ 对称,则函数 $f(x)$ 为周期函数,且 $2|a|$ 为函数 $f(x)$ 的一个周期.

(3)**由一个对称中心与一条对称轴求周期**:若函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 和点 $(b,0)(a\neq b)$ 对称,则函数 $f(x)$ 为周期函数,且 $4|a-b|$ 为函数 $f(x)$ 的一个周期.

特别地,①奇函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a(a\neq0)$ 对称,则函数 $f(x)$ 为周期函数,且 $4|a|$ 为函数 $f(x)$ 的一个周期;②偶函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(a,0)(a\neq0)$ 对称,则函数 $f(x)$ 为周期函数,且 $4|a|$ 为函数 $f(x)$ 的一个周期.

拓展 ①若题中给出 $f(a\pm x)$ 为奇函数,则 $f(x)$ 的图象关于点 $(a,0)$ 对称;

②若题中给出 $f(a\pm x)$ 为偶函数,则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称.