5·3
科学备考

2027全采版
高一高二高三适用

高中知识清单

主编 曲一线

必备知识清单　关键能力拓展

理教材 全面梳理教材 筑牢基础知识

提能力 深度挖掘教材 提升学科能力

明方向 明晰高考方向 做到有的放矢

数学

必修+选择性必修



版权必究
封底验真伪
WISDOM WAY

首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

目录 Contents

必修 第一册

第一章 集合与常用逻辑用语

1.1 集合的概念 …… 2
知识 1 元素与集合 / 2
知识 2 元素与集合的关系 / 2
知识 3 集合中元素的三个特性 / 2
知识 4 集合的分类 / 2
知识 5 常用的数集及其记法 / 2
知识 6 集合的表示方法 / 3
拓展 1 集合中元素特性的应用 / 3
拓展 2 元素与集合的关系 / 4
拓展 3 已知集合相等求参数 / 4

1.2 集合间的基本关系 …… 5
知识 1 Venn 图 / 5
知识 2 子集 / 5
知识 3 集合相等 / 5
知识 4 真子集 / 6
知识 5 空集 / 6
拓展 1 集合间关系的判断方法 / 6
拓展 2 由集合间的关系求参数的值或范围 / 7
拓展 3 有限集合的子集、真子集个数 / 7

1.3 集合的基本运算 …… 8
知识 1 并集 / 8
知识 2 交集 / 8
知识 3 全集与补集 / 9
拓展 1 集合运算的方法 / 9
拓展 2 集合运算中的参数问题 / 10
拓展 3 德·摩根定律 / 11
拓展 4 集合运算中的元素个数问题(容斥原理) / 11
拓展 5 补集思想的应用——正难则反 / 12
拓展 6 集合运算中的新定义问题 / 12

1.4 充分条件与必要条件 …… 12
知识 1 充分条件与必要条件 / 13
知识 2 充要条件 / 13
拓展 1 充分条件、必要条件、充要条件的判断 / 13
拓展 2 充要条件的证明与探求 / 14
拓展 3 应用充分条件和必要条件求参数的值或范围 / 15

1.5 全称量词与存在量词 …… 15
知识 1 全称量词与全称量词命题 / 16
知识 2 存在量词与存在量词命题 / 16
知识 3 全称量词命题和存在量词命题的否定 / 16
拓展 1 全称量词命题与存在量词命题及其真假的判断 / 17
拓展 2 含有一个量词的命题的否定 / 17
拓展 3 已知量词命题的真假求参数 / 18

第二章 一元二次函数、方程和不等式

2.1 等式性质与不等式性质 …… 20
知识 1 不等关系与不等式 / 20
知识 2 实数大小比较的依据 / 21
知识 3 等式的基本性质 / 21
知识 4 不等式的基本性质 / 21
拓展 1 倒数法则 / 22
拓展 2 比较实数(代数式)的大小 / 22
拓展 3 利用不等式的性质求代数式的取值范围 / 23
拓展 4 利用不等式的性质证明不等式 / 24
拓展 5 不等式的实际应用 / 24

2.2 基本不等式 …… 25
知识 1 重要不等式:$a^2+b^2\geqslant 2ab(a,b\in\mathbf{R})$ / 25
知识 2 基本不等式 / 25
知识 3 最值定理 / 26
拓展 1 利用基本不等式求最值 / 27
拓展 2 利用基本不等式比较大小 / 29
拓展 3 利用基本不等式证明不等式 / 30
拓展 4 恒成立求参问题 / 31
拓展 5 基本不等式的拓展 / 31
拓展 6 基本不等式的实际应用 / 31

2.3 二次函数与一元二次方程、不等式 …… 32
知识 1 一元二次不等式及其解法 / 32
知识 2 二次函数与一元二次方程、不等式的关系 / 33
拓展 1 一元二次不等式的解法 / 33
拓展 2 可转化为一元二次不等式(组)的不等式的解法 / 35
拓展 3 绝对值不等式的解法 / 36
拓展 4 三个“二次”之间的关系 / 37
拓展 5 一元二次不等式恒(能)成立问题 / 37
拓展 6 一元二次方程根的分布问题 / 39
拓展 7 数学建模 / 40

第三章 函数的概念与性质

3.1 函数的概念及其表示 …… 42

知识 1 函数的概念 / 42
知识 2 区间与无穷大的概念 / 43
知识 3 同一个函数 / 43
知识 4 函数的表示法 / 44
知识 5 分段函数 / 45

拓展 1 求函数的定义域 / 45
拓展 2 求函数的值 / 47
拓展 3 求函数的解析式 / 47
拓展 4 分段函数的应用 / 49
拓展 5 函数图象的变换 / 50

3.2 函数的基本性质 …… 51

知识 1 增函数与减函数 / 52
知识 2 函数的最大值与最小值 / 53
知识 3 函数的奇偶性 / 54

拓展 1 函数单调性的判断 / 55
拓展 2 函数的最值(值域)的求解及应用 / 56
拓展 3 二次函数在闭区间上的最值 / 59
拓展 4 函数单调性的应用 / 60
拓展 5 判断函数的奇偶性 / 61
拓展 6 函数奇偶性的应用 / 62
拓展 7 函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}(a\neq 0)$ 的图象与性质 / 63
拓展 8 函数图象的对称性 / 64
拓展 9 函数性质的综合应用 / 64

3.3 幂函数 …… 65

知识 1 幂函数的概念 / 65
知识 2 五个常见幂函数的图象与性质 / 65
知识 3 一般幂函数的图象与性质 / 66

拓展 1 幂函数图象的应用 / 67
拓展 2 幂函数单调性的应用 / 68

3.4 函数的应用(一) …… 69

知识 1 常见的函数模型 / 69
知识 2 实际问题中函数建模的基本步骤 / 69

拓展 1 一次函数模型的应用 / 70
拓展 2 二次函数模型的应用 / 70
拓展 3 反比例函数模型的应用 / 71
拓展 4 幂函数模型的应用 / 71
拓展 5 分段函数模型的应用 / 72
拓展 6 数据拟合 / 72

第四章 指数函数与对数函数

4.1 指数 …… 75

知识 1 根式 / 75
知识 2 分数指数幂 / 76
知识 3 无理数指数幂及实数指数幂 / 76

拓展 1 根式的化简 / 76
拓展 2 指数幂的化简与求值 / 77
拓展 3 指数幂的条件求值问题 / 78
拓展 4 指数方程的求解 / 79
拓展 5 指数幂连等式的解题策略 / 79

4.2 指数函数 …… 79

知识 1 指数函数的概念 / 80
知识 2 指数函数的图象与性质 / 80
知识 3 底数对指数函数图象的影响 / 80

拓展 1 指数函数概念的应用 / 81
拓展 2 指数函数的图象及应用 / 81
拓展 3 指数函数单调性的应用 / 83
拓展 4 指数型复合函数的性质 / 84
拓展 5 指数函数在实际生活中的应用 / 86

4.3 对数 …… 86

知识 1 对数的概念、性质与对数恒等式 / 87
知识 2 常用对数与自然对数 / 87
知识 3 对数的运算性质 / 87
知识 4 对数的换底公式及其推论 / 88

拓展 1 对数式的化简与求值的常用方法和技巧 / 88
拓展 2 对数方程问题 / 89
拓展 3 带附加条件的指数、对数问题 / 89
拓展 4 对数的实际应用问题 / 91

4.4 对数函数 …… 91

知识 1 对数函数的概念 / 92
知识 2 对数函数的图象与性质 / 92
知识 3 底数 a 对对数函数 $y=\log_a x(a>0,\text{且 } a\neq 1)$ 图象的影响 / 92
知识 4 反函数 / 93
知识 5 不同函数增长的差异 / 93

拓展 1 对数型函数的图象及其应用 / 93
拓展 2 与对数函数有关的函数的定义域和值域 / 95
拓展 3 对数函数单调性的应用 / 95
拓展 4 与对数函数有关的函数的奇偶性 / 97
拓展 5 一次函数、指数函数、对数函数的增长速度的差异 / 98
拓展 6 根据实际问题选择函数模型 / 98

4.5 函数的应用(二) …… 99

知识 1 函数的零点 / 99

知识 2 函数零点存在定理 / 99
知识 3 用二分法求函数零点的近似值 / 100
知识 4 常见的函数模型 / 101

拓展 1 求函数的零点 / 101
拓展 2 利用二分法求函数零点的近似值 / 102
拓展 3 函数零点(方程根)所在的区间问题 / 102
拓展 4 函数零点(方程根)的个数问题 / 103
拓展 5 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 零点的分布情况 / 104
拓展 6 函数模型及应用 / 105

第五章 三角函数

5.1 任意角和弧度制 …… 108
知识 1 角的相关概念 / 108
知识 2 终边相同的角 / 109
知识 3 象限角与轴线角 / 109
知识 4 角度制、弧度制的概念 / 110
知识 5 角度与弧度的互化 / 110
知识 6 扇形的弧长公式和面积公式 / 111

拓展 1 终边相同的角的表示 / 111
拓展 2 区域角的表示 / 112
拓展 3 弧度制下角的终边的对称与垂直 / 113
拓展 4 象限角的判断 / 113
拓展 5 扇形的弧长公式与面积公式的应用 / 114

5.2 三角函数的概念 …… 115
知识 1 三角函数的概念 / 115
知识 2 三角函数的定义域和值域 / 116
知识 3 三角函数值在各象限内的符号 / 116
知识 4 诱导公式一 / 117
知识 5 同角三角函数的基本关系 / 117

拓展 1 三角函数的概念的应用 / 118
拓展 2 判断三角函数值的符号 / 119
拓展 3 诱导公式一的应用 / 119
拓展 4 利用同角三角函数的基本关系求值 / 120
拓展 5 利用同角三角函数的基本关系化简 / 121
拓展 6 利用同角三角函数的基本关系证明 / 121

5.3 诱导公式 …… 122
知 识 三角函数的诱导公式 / 123

拓展 1 利用诱导公式求值 / 123
拓展 2 利用诱导公式化简三角函数式 / 125
拓展 3 利用诱导公式证明三角恒等式 / 125
拓展 4 利用诱导公式解决与三角形有关的问题 / 126

5.4 三角函数的图象与性质 …… 127
知识 1 正弦函数的图象 / 127
知识 2 五点法作正弦函数 $y=\sin x, x\in[0,2\pi]$ 的图象 / 127
知识 3 余弦函数的图象 / 128
知识 4 函数的周期性 / 128
知识 5 正弦函数和余弦函数的图象与性质 / 129
知识 6 正切函数的图象与性质 / 129

拓展 1 正、余弦函数的图象及其应用 / 130
拓展 2 函数周期性的判断及应用 / 131
拓展 3 正、余弦函数的单调性的应用 / 132
拓展 4 正、余弦函数的奇偶性与其图象的对称性 / 133
拓展 5 求与正、余弦函数有关的函数的值域(或最值) / 135
拓展 6 三角函数零点的问题 / 136
拓展 7 正切函数图象的应用 / 138
拓展 8 正切函数单调性的应用 / 139
拓展 9 正切函数的奇偶性与其图象的对称性 / 140

5.5 三角恒等变换 …… 140
知识 1 两角和与差的余弦公式 / 141
知识 2 两角和与差的正弦公式 / 141
知识 3 两角和与差的正切公式 / 142
知识 4 辅助角公式 / 142
知识 5 二倍角的正弦、余弦、正切公式 / 143
知识 6 半角公式 / 144
知识 7 万能公式 / 144
知识 8 积化和差与和差化积公式 / 144

拓展 1 应用两角和与差的正弦、余弦、正切公式及倍角公式时的常用技巧 / 145
拓展 2 三角函数式的化简 / 146
拓展 3 三角函数的求值 / 147
拓展 4 三角恒等式的证明 / 148
拓展 5 三角恒等变换与三角函数性质的综合问题 / 149

5.6 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ …… 150
知识 1 探索 φ 对函数 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象的影响 / 150
知识 2 探索 $\omega(\omega>0)$ 对函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的影响 / 150
知识 3 探索 $A(A>0)$ 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的影响 / 151
知识 4 由 $y=\sin x$ 的图象得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\omega>0,\varphi\neq0)$ 的图象的过程 / 151
知识 5 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 和 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ $(A\neq0,\omega\neq0)$ 的性质 / 152

拓展 1 “五点法”作三角函数的图象 / 152
拓展 2 三角函数图象的变换 / 153

拓展 3 由部分图象确定函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 的解析式的“两法” / 153
拓展 4 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象与性质的综合应用 / 154
拓展 5 三角函数模型在匀速圆周运动中的应用 / 155

5.7 三角函数的应用 …… 156
知识 1 简谐运动 / 156
知识 2 利用三角函数解决实际问题的步骤 / 157
拓展 1 三角函数模型在物理中的应用 / 157
拓展 2 三角函数模型在实际生活中的应用 / 158

必修 第二册

第六章 平面向量及其应用

6.1 平面向量的概念 …… 160
知识 1 向量的基本概念 / 160
知识 2 向量的表示方法 / 160
知识 3 相等向量与共线向量 / 160
拓展 1 用有向线段表示向量 / 161
拓展 2 对向量相关概念的理解 / 161
拓展 3 相等向量与共线向量的应用 / 162

6.2 平面向量的运算 …… 162
知识 1 向量的加法运算 / 163
知识 2 向量的减法运算 / 163
知识 3 向量的数乘运算 / 164
知识 4 向量共线定理 / 164
知识 5 向量线性运算的重要结论 / 164
知识 6 向量数量积的定义 / 165
知识 7 投影向量 / 165
知识 8 向量数量积的性质和运算律 / 166
拓展 1 向量的三角不等式 / 167
拓展 2 向量的线性运算及其应用 / 167
拓展 3 向量共线定理在几何中的应用 / 168
拓展 4 向量数量积的运算及应用 / 169
拓展 5 向量数量积在平面几何中的应用 / 170
拓展 6 奔驰定理 / 171

6.3 平面向量基本定理及坐标表示 …… 172
知识 1 平面向量基本定理 / 173
知识 2 平面向量的正交分解及坐标表示 / 173
知识 3 平面向量线性运算的坐标表示 / 174
知识 4 平面向量共线的坐标表示 / 174
知识 5 向量坐标运算的重要结论 / 174
知识 6 平面向量数量积的坐标表示 / 175
拓展 1 平面向量基本定理的应用 / 175
拓展 2 平面向量的坐标表示 / 176
拓展 3 应用平面向量垂直的坐标表示解题 / 178
拓展 4 定比分点的坐标表示 / 179
拓展 5 平面向量与三角函数的综合问题 / 180
拓展 6 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ 的应用 / 181
拓展 7 斜坐标系及其应用 / 181

6.4 平面向量的应用 …… 182
知识 1 向量在平面几何中的应用 / 182
知识 2 向量在物理中的应用 / 182
知识 3 余弦定理 / 183
知识 4 正弦定理 / 183
知识 5 三角形的面积公式 / 185
知识 6 测量角度问题 / 185
知识 7 测量距离问题 / 185
知识 8 测量高度问题 / 186
拓展 1 向量在平面几何中的应用 / 186
拓展 2 向量在物理中的应用 / 189
拓展 3 利用正弦、余弦定理及三角形面积公式解三角形 / 190
拓展 4 利用正弦、余弦定理判断三角形的形状 / 192
拓展 5 三角形中最值问题的求解 / 193
拓展 6 三角形的外接圆与内切圆的半径 / 194
拓展 7 用正、余弦定理解决实际应用问题 / 195
拓展 8 与解三角形、平面向量有关的结构不良问题 / 198

微专题集锦 …… 199
专题 向量重要模型现形,向量问题速解 / 199

第七章 复数

7.1 复数的概念 …… 203
知识 1 复数的引入 / 203
知识 2 复数的相关概念 / 203
知识 3 两个复数相等 / 203
知识 4 复数的几何意义 / 203
知识 5 复数的模 / 204
知识 6 共轭复数 / 204
拓展 1 对复数概念的理解 / 205
拓展 2 利用复数相等求参数 / 205
拓展 3 利用复数的几何意义解题 / 205
拓展 4 复数模的求解 / 206

7.2 复数的四则运算 …… 207
知识 1 复数的加法 / 207
知识 2 复数的减法 / 207
知识 3 复数的乘法 / 208
知识 4 复数的除法 / 208
知识 5 在复数范围内实系数一元二次方程的根 / 208

拓展 1 复数的四则运算 / 209
拓展 2 $i^n(n\in\mathbf{N})$ 的周期性及其应用 / 209
拓展 3 关于共轭复数的几个常用结论 / 210
拓展 4 $|z-z_0|(z,z_0\in\mathbf{C})$ 的几何意义 / 210
拓展 5 复数模的性质 / 211
拓展 6 实系数一元二次方程根的问题 / 212

7.3* 复数的三角表示 …… 212
知识 1 复数的三角表示式 / 213
知识 2 复数乘法运算的三角表示及其几何意义 / 213
知识 3 复数除法运算的三角表示及其几何意义 / 213

拓展 1 复数的辐角的主值的求法 / 214
拓展 2 复数的代数形式与三角形式的互化 / 214
拓展 3 n 个复数乘法的三角表示(棣莫弗定理) / 215
拓展 4 1 的 n 次方根($n=3,4,6,8$) / 215

微专题集锦 …… 216
专题 复数问题中的思想方法 / 216

第八章 立体几何初步

8.1 基本立体图形 …… 219
知识 1 空间几何体 / 219
知识 2 多面体 / 219
知识 3 旋转体 / 219
知识 4 棱柱 / 219
知识 5 棱锥 / 220
知识 6 棱台 / 221
知识 7 圆柱、圆锥、圆台和球 / 222
知识 8 简单组合体 / 223

拓展 1 空间几何体的结构特征 / 224
拓展 2 几何体中基本量的计算 / 224
拓展 3 几何体截面问题的探究 / 225
拓展 4 正多面体 / 227

8.2 立体图形的直观图 …… 228
知识 1 画水平放置的平面图形的直观图 / 228
知识 2 画空间几何体的直观图的一般步骤 / 229

拓展 1 平面图形与其直观图的面积间的关系 / 230
拓展 2 由直观图还原平面图形 / 230

8.3 简单几何体的表面积与体积 …… 231
知识 1 棱柱、棱锥、棱台的表面积和体积 / 231
知识 2 圆柱、圆锥、圆台、球的表面积和体积 / 232

拓展 1 空间几何体表面积(侧面积)的求解 / 233
拓展 2 空间几何体体积的求解 / 234
拓展 3 几何体表面上的最短距离问题 / 236
拓展 4 几何体的外接球、内切球问题 / 236
拓展 5 与几何体的体积、表面积有关的实际问题 / 240
拓展 6 祖暅原理 / 241

8.4 空间点、直线、平面之间的位置关系 … 242
知识 1 平面 / 242
知识 2 基本事实 / 243
知识 3 三个推论 / 243
知识 4 空间点、直线、平面之间的位置关系 / 244
知识 5 异面直线 / 245

拓展 1 平面划分空间问题 / 245
拓展 2 确定平面的交线 / 246
拓展 3 空间中的共线、共点、共面问题 / 246
拓展 4 异面直线的判定 / 248
拓展 5 空间直线、平面位置关系的判断 / 248

8.5 空间直线、平面的平行 …… 249
知识 1 直线与直线平行 / 249
知识 2 直线与平面平行的判定定理与性质定理 / 250
知识 3 平面与平面平行的判定定理与性质定理 / 250

拓展 1 基本事实 4 与空间等角定理的综合应用 / 250
拓展 2 线线平行的判定方法 / 251
拓展 3 线面平行的判定方法 / 251
拓展 4 面面平行的判定方法 / 252
拓展 5 利用线面平行的性质定理解题 / 252
拓展 6 利用面面平行的性质定理解题 / 253
拓展 7 平行关系综合应用的解题策略 / 253
拓展 8 线面平行中的探索性问题 / 254

8.6 空间直线、平面的垂直 …… 255
知识 1 空间两直线所成的角 / 255
知识 2 直线与平面垂直 / 255
知识 3 直线与平面所成的角 / 256
知识 4 空间中的距离 / 257
知识 5 二面角 / 257
知识 6 平面与平面垂直 / 258

拓展 1 证明垂直问题 / 258
拓展 2 求空间中的角 / 260
拓展 3 求空间距离 / 264

拓展 4 直线与平面垂直的性质的应用 / 267
拓展 5 平面与平面垂直的性质定理的应用 / 267
拓展 6 与垂直有关的探索性问题 / 268
拓展 7 与空间角、距离有关的结构不良问题 / 269

第九章 统计

9.1 随机抽样 …… 272
知识 1 统计中的相关概念 / 272
知识 2 简单随机抽样 / 272
知识 3 总体均值与样本均值 / 274
知识 4 分层随机抽样 / 274
知识 5 获取数据的途径 / 275

拓展 1 样本均值与总体均值的求解 / 275
拓展 2 分层随机抽样中有关的计算 / 275
拓展 3 分层随机抽样的方案设计 / 276

9.2 用样本估计总体 …… 277
知识 1 频率分布表和频率分布直方图 / 277
知识 2 其他几类常用统计图——条形图、折线图、扇形图 / 278
知识 3 总体百分位数的估计 / 279
知识 4 总体集中趋势的估计 / 279
知识 5 总体离散程度的估计 / 280

拓展 1 平均数、方差的计算方法 / 281
拓展 2 样本数字特征的计算与应用 / 282
拓展 3 扇形图、折线图、条形图的应用 / 283
拓展 4 频率分布直方图中的统计参数 / 284

第十章 概率

10.1 随机事件与概率 …… 286
知识 1 随机试验 / 286
知识 2 样本点和样本空间 / 286
知识 3 事件及其分类 / 286
知识 4 事件的关系和运算 / 287
知识 5 古典概型 / 288
知识 6 概率的基本性质 / 288

拓展 1 样本空间中样本点的求法 / 289
拓展 2 事件的运算 / 289
拓展 3 求事件的概率 / 290
拓展 4 古典概型的综合应用 / 291

10.2 事件的相互独立性 …… 293
知识 1 相互独立事件的定义 / 293
知识 2 相互独立事件的性质 / 293

拓展 1 相互独立事件的判断 / 293
拓展 2 求复杂事件的概率 / 294

10.3 频率与概率 …… 295
知识 1 频率的随机性与稳定性 / 296
知识 2 频率与概率的关系 / 296
知识 3 随机模拟 / 296

拓展 1 用频率估计概率 / 297
拓展 2 总体中个体数的估计问题 / 298
拓展 3 极大似然法 / 299
拓展 4 概率的综合应用 / 299

选择性必修 第一册

第一章 空间向量与立体几何

1.1 空间向量及其运算 …… 302
知识 1 空间向量的有关概念 / 302
知识 2 空间向量的线性运算 / 302
知识 3 共线向量与共面向量 / 303
知识 4 空间向量的数量积 / 303

拓展 1 空间向量加法运算律 / 304
拓展 2 空间向量共线、共面定理的应用 / 305
拓展 3 空间向量的数量积及其应用 / 305
拓展 4 利用空间向量的数量积证明立体几何中的垂直问题 / 306

1.2 空间向量基本定理 …… 307
知识 1 空间向量基本定理 / 307
知识 2 单位正交基底与空间向量的正交分解 / 308

拓展 1 用基底表示向量的步骤 / 309
拓展 2 利用基底法解决立体几何问题 / 309

1.3 空间向量及其运算的坐标表示 …… 310
知识 1 空间直角坐标系 / 310
知识 2 空间直角坐标系中点和向量的坐标 / 310
知识 3 空间向量运算的坐标表示 / 310
知识 4 空间向量平行与垂直的坐标表示 / 311
知识 5 空间中两向量的夹角、模长与两点间的距离公式 / 311

拓展 1 空间向量坐标运算的方法 / 311
拓展 2 利用空间向量平行与垂直的坐标表示求参数 / 312

拓展 3 空间中的定比分点坐标公式与三角形的重心坐标公式 / 312
拓展 4 空间向量的坐标运算在立体几何中的应用 / 313

1.4 空间向量的应用 …… 314
知识 1 空间中点、直线和平面的向量表示 / 314
知识 2 平面的法向量 / 315
知识 3 空间线、面位置关系的判定 / 315
知识 4 利用空间向量研究空间距离 / 315
知识 5 利用空间向量研究空间角 / 316

拓展 1 平面法向量的求法 / 317
拓展 2 利用空间向量证明平行关系 / 317
拓展 3 利用空间向量证明垂直关系 / 318
拓展 4 利用空间向量求空间角 / 320
拓展 5 利用空间向量求空间距离 / 323
拓展 6 利用空间向量解决探索性问题 / 326

第二章 直线和圆的方程

2.1 直线的倾斜角与斜率 …… 329
知识 1 直线的倾斜角 / 329
知识 2 直线的斜率 / 329
知识 3 两条直线平行和垂直的判定 / 330

拓展 1 求直线的倾斜角 / 331
拓展 2 求直线的斜率 / 332
拓展 3 斜率公式的应用 / 332
拓展 4 两条直线平行的判定与应用 / 333
拓展 5 两条直线垂直的判定与应用 / 333
拓展 6 利用两直线平行和垂直判断图形形状 / 334

2.2 直线的方程 …… 334
知识 1 直线方程的几种形式 / 335
知识 2 两条直线的位置关系 / 335

拓展 1 求直线方程的一般方法 / 336
拓展 2 求与已知直线垂直的直线方程 / 336
拓展 3 求与已知直线平行的直线方程 / 336
拓展 4 利用直线方程中参数的几何意义解决相关问题 / 337
拓展 5 两直线的位置关系 / 337
拓展 6 直线系方程 / 338

2.3 直线的交点坐标与距离公式 …… 339
知识 1 两条直线的交点坐标 / 339
知识 2 距离公式 / 339
知识 3 平面内的中点坐标公式 / 339

拓展 1 求两直线的交点坐标或参数值 / 340
拓展 2 求距离问题 / 340
拓展 3 直线过定点问题 / 341
拓展 4 经过两直线交点的直线方程 / 341
拓展 5 线段垂直平分线的方程 / 341
拓展 6 常见的对称问题 / 342
拓展 7 利用对称求最值 / 344
拓展 8 与距离有关的最值问题 / 345
拓展 9 实际生活中与直线有关的问题 / 345

2.4 圆的方程 …… 346
知识 1 圆的定义 / 347
知识 2 圆的方程 / 347
知识 3 点与圆的位置关系 / 347

拓展 1 圆的方程的求解 / 348
拓展 2 圆的对称圆的方程 / 350
拓展 3 与圆有关的轨迹问题 / 350
拓展 4 与圆有关的实际应用问题 / 351

2.5 直线与圆、圆与圆的位置关系 …… 352
知识 1 直线与圆的位置关系 / 352
知识 2 圆与圆的位置关系 / 353

拓展 1 直线与圆的位置关系的判断方法 / 353
拓展 2 直线与圆相切有关的问题 / 354
拓展 3 直线与圆相交时的弦长及中点弦问题 / 357
拓展 4 与圆有关的最值问题 / 359
拓展 5 两圆相切问题 / 360
拓展 6 两圆相交时的公共弦 / 361
拓展 7 巧用圆系方程解决问题 / 362
拓展 8 切割线定理 / 362
拓展 9 直线与圆、圆与圆的位置关系的实际应用 / 363

第三章 圆锥曲线的方程

3.1 椭圆 …… 365
知识 1 椭圆的定义 / 365
知识 2 椭圆的方程与简单几何性质 / 365
知识 3 点与椭圆的位置关系 / 366
知识 4 直线与椭圆的位置关系 / 366
知识 5 关于椭圆的几个重要结论 / 367

拓展 1 椭圆标准方程的求解 / 368
拓展 2 椭圆中的焦点三角形问题 / 369
拓展 3 椭圆离心率的求解 / 370
拓展 4 直线与椭圆的位置关系 / 370
拓展 5 椭圆的第二定义 / 371
拓展 6 实际生活中与椭圆有关的问题 / 372

3.2 双曲线 …… 373
知识 1 双曲线的定义 / 373
知识 2 双曲线的标准方程与几何性质 / 373

知识 3　直线与双曲线的位置关系 / 374
知识 4　关于双曲线的几个重要结论 / 374

拓展 1　双曲线标准方程的求解 / 375
拓展 2　与双曲线的几何性质有关的问题 / 376
拓展 3　双曲线的焦点三角形 / 379
拓展 4　直线与双曲线的位置关系 / 379
拓展 5　双曲线的第二定义 / 381
拓展 6　实际生活中与双曲线有关的问题 / 382

3.3 抛物线 …… 383
知识 1　抛物线的定义 / 383
知识 2　抛物线的标准方程与几何性质 / 383
知识 3　抛物线的焦点弦的重要结论 / 384
知识 4　关于抛物线的几个重要结论 / 384

拓展 1　抛物线标准方程的求解 / 385
拓展 2　抛物线定义的应用 / 386
拓展 3　抛物线的焦点弦问题 / 387
拓展 4　直线与抛物线的位置关系 / 388
拓展 5　抛物线的实际应用问题 / 389

微专题集锦 …… 390
专题 1　圆锥曲线中的最值与范围问题 / 390
专题 2　直线与圆锥曲线的中点弦问题 / 391
专题 3　圆锥曲线中的定点、定值与定直线问题 / 392
专题 4　圆锥曲线中的存在性问题 / 395
专题 5　圆锥曲线中的结构不良问题 / 395

选择性必修 第二册

第四章 数列

4.1 数列的概念 …… 398
知识 1　数列的概念 / 398
知识 2　数列的分类 / 399
知识 3　数列的通项公式 / 399
知识 4　数列的递推公式 / 399
知识 5　数列的前 n 项和 / 400

拓展 1　求数列的通项公式 / 400
拓展 2　数列的单调性 / 402
拓展 3　数列的应用问题 / 404

4.2 等差数列 …… 405
4.2.1 等差数列的概念 / 405
知识 1　等差数列的概念 / 405
知识 2　等差中项 / 405
知识 3　等差数列的通项公式 / 405
知识 4　等差数列与一次函数的关系 / 405
知识 5　等差数列的常用性质 / 406

拓展 1　等差数列的判定与证明 / 406
拓展 2　等差数列的通项公式的求解及应用 / 407
拓展 3　等差数列性质的应用 / 408
拓展 4　等差数列的实际应用问题 / 409

4.2.2 等差数列的前 n 项和公式 / 409
知识 1　等差数列的前 n 项和公式 / 409
知识 2　等差数列的前 n 项和公式与二次函数的关系 / 410
知识 3　等差数列前 n 项和的常用性质 / 410

拓展 1　等差数列前 n 项和公式及其应用 / 411
拓展 2　等差数列前 n 项和常用性质的应用 / 412
拓展 3　等差数列前 n 项和最值的求法 / 413
拓展 4　求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和的方法 / 414
拓展 5　等差数列前 n 项和的实际应用问题 / 414

4.3 等比数列 …… 415
4.3.1 等比数列的概念 / 415
知识 1　等比数列的概念 / 415
知识 2　等比中项 / 416
知识 3　等比数列的通项公式 / 416
知识 4　等比数列的通项公式与指数函数的关系 / 416
知识 5　等比数列的单调性 / 416
知识 6　等比数列的常用性质 / 417

拓展 1　等比数列常用的判定方法 / 417
拓展 2　等比数列的通项公式的求解及应用 / 418
拓展 3　等比数列性质的应用 / 419
拓展 4　等差数列与等比数列的综合问题 / 419
拓展 5　等比数列在实际生活中的应用 / 420

4.3.2 等比数列的前 n 项和公式 / 420
知识 1　等比数列的前 n 项和公式 / 420
知识 2　等比数列前 n 项和公式与指数函数的关系 / 421
知识 3　等比数列前 n 项和的常用性质 / 422

拓展 1　等比数列前 n 项和公式的应用 / 422
拓展 2　等比数列前 n 项和性质的应用 / 423
拓展 3　等比数列前 n 项积的问题 / 424
拓展 4　等比数列前 n 项和在实际生活中的应用 / 424

4.4* 数学归纳法 …… 425
知识1 归纳法 / 425
知识2 数学归纳法 / 425
拓展1 用数学归纳法证明恒等式 / 425
拓展2 用数学归纳法证明不等式 / 426
拓展3 用数学归纳法证明几何问题 / 427
拓展4 用数学归纳法证明整除问题 / 427
拓展5 用归纳、猜想及数学归纳法解决与递推公式有关的数列问题 / 428
微专题集锦 …… 429
专题1 根据数列的递推公式求通项公式 / 429
专题2 数列求和的常用方法 / 433
专题3 数列中的奇偶项问题 / 437
专题4 与数列有关的结构不良问题 / 438
专题5 数列与其他知识的交汇问题 / 439

第五章 一元函数的导数及其应用

5.1 导数的概念及其意义 …… 442
知识1 瞬时速度(物理背景) / 442
知识2 抛物线的切线的斜率 / 442
知识3 函数的平均变化率 / 442
知识4 函数在某点处的导数 / 443
知识5 函数在某点处的导数的几何意义 / 443
知识6 导函数的定义 / 443
拓展1 函数的平均变化率 / 444
拓展2 利用导数的定义解题 / 444
拓展3 导数的几何意义的应用 / 445

5.2 导数的运算 …… 446
知识1 基本初等函数的导数公式 / 446
知识2 导数的四则运算法则 / 446
知识3 简单复合函数的导数 / 447
拓展1 求函数的导数 / 447
拓展2 导数运算的应用 / 448
拓展3 求曲线的切线 / 448
拓展4 利用导数运算解决切线问题 / 449
拓展5 抽象函数的导数的奇偶性 / 450

5.3 导数在研究函数中的应用 …… 451
知识1 函数的单调性和导数的关系 / 451
知识2 函数的极值 / 452
知识3 函数的最大值与最小值 / 453
拓展1 利用导数研究单调性问题 / 454
拓展2 函数的极值问题 / 456
拓展3 函数的最值问题 / 458
拓展4 利用导数解决生活中的优化问题 / 459
微专题集锦 …… 460
专题1 利用导数研究三次函数问题 / 460
专题2 利用导数研究函数的零点问题 / 461
专题3 利用导数解决不等式问题 / 463
专题4 极值点偏移问题 / 466
专题5 洛必达法则的应用 / 468

选择性必修 第三册

第六章 计数原理

6.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理 …… 470
知识1 分类加法计数原理 / 470
知识2 分步乘法计数原理 / 470
知识3 分类加法计数原理与分步乘法计数原理的辨析 / 471
拓展1 分类加法计数原理的应用 / 471
拓展2 分步乘法计数原理的应用 / 472
拓展3 两个计数原理的综合应用 / 472
拓展4 元素、位置选择法 / 473
拓展5 解决计数问题常用的方法和技巧 / 473

6.2 排列与组合 …… 474
6.2.1 排列 6.2.2 排列数 / 475
知识1 排列 / 475
知识2 排列数 / 475
知识3 全排列和阶乘 / 476
拓展1 有关排列数的计算与证明 / 476
拓展2 无限制条件的排列问题 / 477
拓展3 有限制条件的排列问题 / 477
拓展4 与数字有关的排列问题 / 479
6.2.3 组合 6.2.4 组合数 / 480
知识1 组合 / 480
知识2 组合数与组合数公式 / 480
知识3 组合数的性质 / 480

拓展 1 有关组合数的计算与证明 / 480
拓展 2 无限制条件的组合问题 / 481
拓展 3 有限制条件的组合问题 / 482
拓展 4 分组分配问题 / 482
拓展 5 用隔板法解决相同元素分配问题 / 483
拓展 6 排列、组合的综合应用问题 / 484

6.3 二项式定理 …… 484
知识 1 二项式定理 / 484
知识 2 二项式系数的性质 / 485

拓展 1 求展开式的特定项 / 486
拓展 2 多项展开式问题 / 486
拓展 3 多项式乘积的展开式中的特定项问题 / 487
拓展 4 用赋值法求系数和问题 / 488
拓展 5 求展开式中系数的最大(小)值的方法 / 488
拓展 6 二项式定理的应用 / 489
拓展 7 杨辉三角问题 / 490

第七章 随机变量及其分布

7.1 条件概率与全概率公式 …… 492
知识 1 条件概率 / 492
知识 2 概率的乘法公式 / 492
知识 3 全概率公式 / 492
知识 4 *贝叶斯公式 / 493

拓展 1 条件概率的计算 / 493
拓展 2 概率的乘法公式的应用 / 494
拓展 3 求较复杂事件的概率 / 494
拓展 4 全概率公式的有关计算 / 495

7.2 离散型随机变量及其分布列 …… 495
知识 1 随机变量与离散型随机变量 / 496
知识 2 离散型随机变量的分布列 / 496
知识 3 两点分布(0—1 分布) / 496

拓展 1 求离散型随机变量的分布列 / 497
拓展 2 以统计图表为背景的分布列问题 / 497
拓展 3 两个相关的随机变量的分布列问题 / 498

7.3 离散型随机变量的数字特征 …… 499
知识 1 离散型随机变量的均值 / 499
知识 2 均值的性质 / 500
知识 3 离散型随机变量的方差、标准差 / 500
知识 4 方差的有关性质 / 501
知识 5 两点分布的均值与方差 / 501

拓展 1 利用均值与方差的性质求参 / 501
拓展 2 均值在解决实际问题中的应用 / 502
拓展 3 均值与方差的综合应用 / 503

7.4 二项分布与超几何分布 …… 503
知识 1 伯努利试验 / 504
知识 2 二项分布 / 504
知识 3 超几何分布 / 504

拓展 1 二项分布的实际应用 / 504
拓展 2 二项分布中的最大值问题 / 506
拓展 3 超几何分布的实际应用 / 506
拓展 4 二项分布与超几何分布的综合应用 / 507

7.5 正态分布 …… 508
知识 1 连续型随机变量 / 508
知识 2 正态分布 / 508
知识 3 正态曲线的特点 / 509
知识 4 3σ 原则 / 509

拓展 1 正态密度函数中参数的意义 / 509
拓展 2 正态分布概率问题的求解方法 / 510
拓展 3 正态分布的实际应用 / 511

微专题集锦 …… 512
专题 概率与数列的综合问题 / 512

第八章 成对数据的统计分析

8.1 成对数据的统计相关性 …… 515
知识 1 变量的相关关系 / 515
知识 2 样本相关系数 / 516

拓 展 两个变量相关关系的判断 / 517

8.2 一元线性回归模型及其应用 …… 518
知识 1 一元线性回归模型 / 518
知识 2 经验回归方程与最小二乘法 / 518
知识 3 残差分析 / 519
知识 4 检验模型拟合效果的方式 / 519

拓展 1 经验回归方程及其应用 / 519
拓展 2 建立回归模型的基本步骤 / 520
拓展 3 非线性经验回归方程的求法 / 521

8.3 列联表与独立性检验 …… 523
知识 1 分类变量 / 523
知识 2 2×2 列联表 / 523
知识 3 等高堆积条形图 / 524
知识 4 独立性检验 / 524

拓展 1 独立性检验的应用 / 525
拓展 2 独立性检验与统计、概率的综合应用 / 525

集合中的元素必须是确定的 → 确定性

集合中的元素是互不相同的 → 互异性

构成集合的元素间无先后顺序之分 → 无序性

集合中元素的三个特性

集合的表示方法

❶ 列举法

元素放在花括号内

$\{a, b, c, \cdots\}$

元素间用逗号隔开

❷ 描述法

竖线可用冒号或分号代替

$\{x \in A \mid P(x)\}$

代表元素　代表元素的共同特征

❸ 图示法

Venn 图、数轴

集合间的基本关系

子集　$A \subseteq B$　或　$A \subseteq B$

真子集　$A \subsetneq B$

集合的基本运算

并集　$A \cup B = \{x \mid x \in A, \text{或 } x \in B\}$

交集　$A \cap B = \{x \mid x \in A, \text{且 } x \in B\}$

补集　$\complement_U A = \{x \mid x \in U, \text{且 } x \notin A\}$

集合与常用逻辑用语

常用逻辑用语

全称量词与存在量词

	全称量词命题	存在量词命题
定义	含有全称量词的命题	含有存在量词的命题
符号表示	$\forall x \in M, p(x)$	$\exists x \in M, p(x)$
否定	$\exists x \in M, \neg p(x)$，是存在量词命题	$\forall x \in M, \neg p(x)$，是全称量词命题
真假判断	判定为真时，要对 M 中每个元素 x，证明 $p(x)$ 成立；判定为假时，在 M 中找到一个元素 x，使 $p(x)$ 不成立（举反例）	判定为真时，只需在 M 中找到一个元素 x，使 $p(x)$ 成立即可；判定为假时，在 M 中，使 $p(x)$ 成立的元素 x 不存在

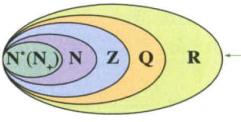
充分条件与必要条件

判断充分条件与必要条件的方法

条件	定义法	集合法 $(A=\{x \mid p(x)\}, B=\{x \mid q(x)\})$
p 是 q 的充分条件	$p \Rightarrow q$	$A \subseteq B$
p 是 q 的必要条件	$p \Leftarrow q$	$A \supseteq B$
p 是 q 的充要条件	$p \Leftrightarrow q$	$A = B$
p 是 q 的充分不必要条件	$p \Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$	$A \subsetneq B$
p 是 q 的必要不充分条件	$p \not\Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$	$A \supsetneq B$
p 是 q 的既不充分也不必要条件	$p \not\Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$	$A \not\subseteq B$ 且 $B \not\subseteq A$

1.1 集合的概念

知识图谱



常用数集之间的关系

集合的概念

集合
- 定义：把研究对象统称为元素，把一些元素组成的总体叫做集合
- 集合相等
- 元素与集合的关系（∈，∉）
- 集合中元素的三个特性：确定性、互异性、无序性
- 集合的表示方法
  - 列举法：{a，b，c，…}
  - 描述法：{x∈A|P(x)}

必备知识 清单

1 元素与集合 ★

1.元素与集合的含义：一般地，我们把研究对象统称为元素，把一些元素组成的总体叫做集合（简称为集）.通常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合中的元素.

2.集合相等：只要构成两个集合的元素是一样的，我们就称这两个集合是相等的.反过来，当两个集合相等时，这两个集合中的元素是完全相同的.

顺序可以不同.

只能用在元素与集合之间，表示从属关系.

2 元素与集合的关系 ★★

关系	概念	记法
属于	如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于集合 A	$a\in A$
不属于	如果 a 不是集合 A 中的元素，就说 a 不属于集合 A	$a\notin A$

3 集合中元素的三个特性 ★★★

1.**确定性**：集合中的元素必须是确定的.如：集合 $A=\{1,2,3\}$，则 $1\in A,4\notin A$.

2.**互异性**：一个给定集合中的元素是互不相同的.如：方程 $x^2-2x+1=0$ 的所有实数根组成的集合为 $\{1\}$，不能写成 $\{1,1\}$.

3.**无序性**：集合中的元素没有先后顺序，任意改变元素的排列次序，它们仍表示同一个集合.如：集合 $\{1,2\}$ 和 $\{2,1\}$ 是同一个集合.

4 集合的分类 ★

按元素的多少可将集合分为有限集（元素个数有限）和无限集（元素个数无限）.

5 常用的数集及其记法 ★★

1.几种常用的数集

*在右上角，+在右下角.

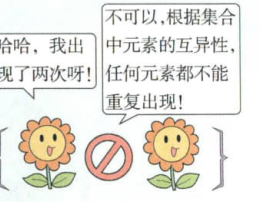
名称	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
记法	$\mathbf{N}$	$\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{R}$

深度剖析 集合的三个特性

1.描述性：“集合”是一个原始的不加定义的概念，它同平面几何中的“点”“线”等概念一样，都只是描述性的说明.

2.整体性：集合是一个整体，含“所有”“全部”“全体”的意思，故一些对象一旦组成了集合，这个集合就是这些对象的总体.

3.广泛性：集合中的元素可以是数、点、图形、多项式、方程、集合，也可以是人或物等.



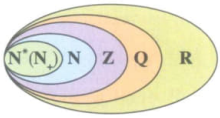
想一想 集合{0,1}与集合{(0,1)}相等吗?

不相等.集合{0,1}中有0,1两个元素，是数集，而集合{(0,1)}中只有一个元素(0,1)，是点集.

知识辨析 $\mathbf{N},\mathbf{N}^*$（或 $\mathbf{N}_+$）的区别

$\mathbf{N}$ 为非负整数集（或自然数集），而 $\mathbf{N}^*$（或 $\mathbf{N}_+$）为正整数集，不同之处就是 $\mathbf{N}$ 包含 0，而 $\mathbf{N}^*$（或 $\mathbf{N}_+$）不包含 0.

2.常用数集之间的关系



6 集合的表示方法 ★★★

方法	列举法	描述法
含义	把集合的所有元素一一列举出来，并用花括号“{}”括起来表示集合的方法	用集合中所含元素的共同特征来表示集合.基本形式为$\{x\in A\mid P(x)\}$，x是集合的代表元素，集合A是x的取值(或变化)范围，$P(x)$是集合中元素所具有的共同特征
格式	用“{}”括起来 {1, 2, 3} 各元素用“,”隔开	用“{}”括起来 $\{x\in A\mid P(x)\}$ 元素具有的共同特征 竖线隔开 代表元素的取值(或变化)范围 代表元素的符号
优点	方便、快捷，集合中的元素一目了然	语言简洁，元素的规律与性质能清楚地表示出来
缺点	不易看出元素所具有的特征，且有些集合不能用列举法表示，如不等式$2x-3>0$的解集	不易看出集合中的具体元素
适用条件	适用于表示元素个数较少或元素个数多但有规律的集合	适用于表示无限集或元素个数较多的集合

例 用适当的方法表示下列集合.

(1)大于1且小于10的所有质数组成的集合；

(2)不等式$3x-1>5$的解集；

(3)函数$y=2x-1$图象上所有点组成的集合.

只有1和它本身两个正因数，又称素数.

解析 (1)大于1且小于10的质数有2,3,5,7,故组成的集合为$\{2,3,5,7\}$.

(2)由$3x-1>5$,得$x>2$,故不等式$3x-1>5$的解集为$\{x\mid x>2\}$.

(3)函数$y=2x-1$图象上所有点组成的集合为$\{(x,y)\mid y=2x-1\}$.

点的表示.

知识补充 用列举法表示集合时的省略

元素个数多或元素个数无限时，在不发生误解的情况下，可按照规律列出几个元素作为代表，其他元素用省略号表示.如：从1到1 000的所有自然数可以表示为$\{1,2,3,\cdots,1\,000\}$，自然数集$\mathbf{N}$可以表示为$\{0,1,2,3,\cdots\}$.

温馨提示 描述法注意事项

1.写清集合中的代表元素及其范围，如数或点等；

2.用简明、准确的语言进行描述；

3.不能出现未被说明的字母；

4.所有描述的内容都要写在花括号内，且花括号内不能出现“所有”“全体”等词语；

5.多层描述时，应当准确使用“且”“或”等表示元素之间关系的词语.

关键能力 拓展

1 集合中元素特性的应用 ★★★

1.确定性主要体现在集合中的元素满足集合的限制条件，由此可列出方程(组)或不等式(组)解决问题.

2.互异性主要体现在求出参数后要代入检验，同一集合中的元素要互不相等.

3.无序性是分类讨论思想的应用标准，主要体现在：①给出元素属于某集合，则它可能等于集合中的任一元素；②给出两集合相等，

则其中的元素不一定按顺序对应相等.

例1 已知集合 $A=\{0,1,2\}$,则集合 $B=\{x-y\mid x\in A,y\in A\}=$_____.

解析 ①当 $x=0$ 时,y 可取 0,1,2,此时 $x-y$ 的值分别为 0,-1,-2;→分类讨论.

②当 $x=1$ 时,y 可取 0,1,2,此时 $x-y$ 的值分别为 1,0,-1;

③当 $x=2$ 时,y 可取 0,1,2,此时 $x-y$ 的值分别为 2,1,0.

由集合中元素的互异性得集合 $B=\{-2,-1,0,1,2\}$.

答案 $\{-2,-1,0,1,2\}$

2 元素与集合的关系 ☆☆

1.判断元素与集合的关系

元素与集合之间只有"属于"和"不属于"两种关系,在判断一个元素是否属于某个集合时,若集合是以列举法形式给出的,则直接判断即可;若集合是以描述法形式给出的,则一要明确集合中所含元素的共同特征,二要看该元素是否满足集合中元素的共同特征.

例2 (多选题)(2026 安徽蚌埠月考)已知集合 $A=\{y\mid y=x^2+1\}$,$B=\{(x,y)\mid y=x^2+1\}$,则下列关系正确的是 ( )

A.$A=B$ B.$2\in A$ C.$1\notin B$ D.$(1,2)\in B$

解析 $A=\{y\mid y=x^2+1\}=\{y\mid y\geqslant 1\}$,表示数集,$B=\{(x,y)\mid y=x^2+1\}$,表示点集,

【指点迷津】 注意区分数集与点集.

故 $A\neq B$,A 错误;

因为 $2>1$,所以 $2\in A$,B 正确;

1 是一个数,B 表示点集,故 $1\notin B$,C 正确;

因为 $2=1^2+1$,所以 $(1,2)\in B$,D 正确.

答案 BCD

2.已知元素与集合的关系求参数

当 $a\in A$ 时,若集合 A 是用描述法表示的,则 a 一定满足集合中元素的共同特征,如满足方程(组)、不等式(组)等;若集合 A 是用列举法表示的,则 a 一定等于集合 A 中的某个元素.反之,当 $a\notin A$ 时,结论恰恰相反.利用上述结论建立方程(组)或不等式(组)求解参数即可.求出参数的值后要注意检验集合中的元素是否满足互异性.

例3 (1)(2026 重庆沙坪坝凤鸣山中学教育共同体期中)已知集合 $A=\{12,a^2+4a,a-2\}$,$-3\in A$,则 $a=$ ( )

A.-1 B.-3 或-1 C.3 D.-3

(2)若 $2\notin\{x\mid x-a>0\}$,则实数 a 的取值范围是_____.

解析 (1)因为 $-3\in A$,所以 $a^2+4a=-3$ 或 $a-2=-3$,

由 $a^2+4a=-3$ 解得 $a=-1$ 或 $a=-3$,

由 $a-2=-3$ 解得 $a=-1$,

【易错点拨】 注意将 a 的值代回集合 A 进行检验,判断是否满足集合中元素的互异性.

①当 $a=-1$ 时,$a^2+4a=a-2=-3$,不满足集合中元素的互异性,故舍去;

②当 $a=-3$ 时,$A=\{12,-3,-5\}$,符合题意.故选 D.

(2)因为 $2\notin\{x\mid x-a>0\}$,所以 2 不满足不等式 $x-a>0$,即 2 满足不等式 $x-a\leqslant 0$,

所以 $2-a\leqslant 0$,即 $a\geqslant 2$.

答案 (1)D (2)$\{a\mid a\geqslant 2\}$

3 已知集合相等求参数 ☆☆

从集合相等的定义入手,寻找元素之间的关系.若集合中的元素不止一个,则需要分类讨论.注意利用集合中元素的互异性对得到的结果进行检验.

例4 (2026 广东广州质检)若 $\left\{1,a,\frac{b}{a}\right\}=\{0,a^2,a+b\}$,则 $a+b=$_____.

解析 ∵集合 $\left\{1,a,\frac{b}{a}\right\}$ 中有元素 $\frac{b}{a}$,

$\therefore a\neq 0$,

【指点迷津】多思少算,集合中有元素$\frac{b}{a}$,其分母不为0,从而避开对$a=0$的讨论.

$\because \left\{1,a,\frac{b}{a}\right\}=\{0,a^2,a+b\}$,$\therefore \frac{b}{a}=0$,$\therefore b=0$,则$a+b=a$,

$\therefore a^2=1$,解得$a=1$或$a=-1$,

当$a=1$时,$\left\{1,a,\frac{b}{a}\right\}$和$\{0,a^2,a+b\}$均不满足集合中元素的互异性,故舍去;

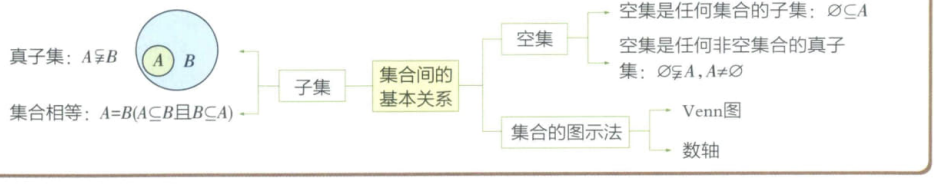
当$a=-1$时,$\left\{1,a,\frac{b}{a}\right\}=\{1,-1,0\}$,$\{0,a^2,a+b\}=\{0,1,-1\}$,满足题意.

$\therefore a=-1$,则$a+b=a=-1$.

答案 -1

1.2 集合间的基本关系

知识图谱



必备知识 清单

1 Venn图 ★

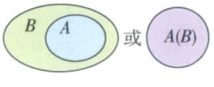
在数学中,我们经常用平面上封闭曲线的内部代表集合,这种图称为Venn图.

1.表示集合的Venn图的边界是封闭曲线,它可以是圆、矩形,也可以是其他封闭曲线.

2.用Venn图表示集合的优点是能直观地表示集合间的关系,缺点是集合中元素的共同特征不明显.

2 子集 ★★★

1.**定义**:一般地,对于两个集合A,B,如果集合A中任意一个元素都是集合B中的元素,就称集合A为集合B的子集,记作$A\subseteq B$(或$B\supseteq A$),读作"A包含于B"(或"B包含A"),如图.



即"全部""每一个""所有的".

2.**性质**

1)自反性:任何一个集合是它本身的子集,即$A\subseteq A$;

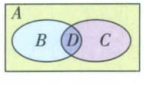
2)传递性:对于集合A,B,C,若$A\subseteq B$,且$B\subseteq C$,则$A\subseteq C$.

3 集合相等 ★★

1.**定义**:一般地,如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素,同时集合B的任何一个元素都是集合A的元素,那么集合A与集合

用Venn图表示集合之间关系的示例

$A=\{x|x$是平行四边形$\}$,$B=\{x|x$是菱形$\}$,$C=\{x|x$是矩形$\}$,$D=\{x|x$是正方形$\}$.表示A,B,C,D之间关系的Venn图如图所示.



深度剖析 对子集的理解

1."A是B的子集"的含义:集合A中的任何一个元素都是集合B中的元素,即若$A\subseteq B$,则由$x\in A$,能得出$x\in B$.

2.如果集合A中存在不是集合B中的元素,那么A不包含于B(或B不包含A),记作$A\not\subseteq B$(或$B\not\supseteq A$).

3.在子集的定义中,不能理解为集合A是集合B中的部分元素所组成的集合,因为A中也可以不含任何元素.若$A=B$,则A中含有B中的所有元素,但此时我们也可以说集合A是集合B的子集.

B 相等，记作 $A=B$. 也就是说，若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则 $A=B$，如图.

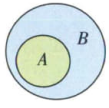


2.性质

1) 满足 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$；

2) 两个集合中的元素完全相同.

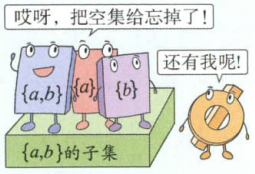
4 真子集 ★★★

文字语言	图形语言	性质
如果集合 $A\subseteq B$，但存在元素 $x\in B$，且 $x\notin A$，就称集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subsetneq B$（或 $B\supsetneq A$），读作“A 真包含于 B”（或“B 真包含 A”）		(1) 对于集合 A,B，若 $A\subseteq B$，且 $A\neq B$，则 $A\subsetneq B$； (2) 传递性：对于集合 A,B,C，若 $A\subsetneq B$，且 $B\subsetneq C$，则 $A\subsetneq C$

5 空集 ★★★

1.定义：一般地，我们把不含任何元素的集合叫做空集，记为 $\varnothing$，如 $\{x\mid x^2+2x+3=0\}=\varnothing$，$\{x\mid 3<x<2\}=\varnothing$. （元素个数为 0.）

2.规定：空集是任何集合的子集，即 $\varnothing\subseteq A$. 空集是任何非空集合的真子集，即 $\varnothing\subsetneq A(A\neq\varnothing)$.



集合 $\{a,b\}$ 的子集为 $\{a\}$，$\{b\}$，$\{a,b\}$，$\varnothing$.

深度剖析　对“$\varnothing$”的理解

1. 数 0，$\{0\}$，$\varnothing$，$\{\varnothing\}$ 的意义：数 0 不是集合，$\{0\}$ 是含一个元素 0 的集合，$\varnothing$ 是不含任何元素的集合，$\{\varnothing\}$ 是指以 $\varnothing$ 为元素的集合.

2. $\varnothing$ 作为一个元素时，$\varnothing\neq 0$，$\varnothing\in\{\varnothing\}$，$\varnothing\notin\{0\}$；
$\varnothing$ 作为一个集合时，$\varnothing\subseteq\{0\}$，$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$，$\varnothing\neq\{0\}$.

关键能力　拓展

1 集合间关系的判断方法 ★★★

1.列举观察法

当集合中元素较少时，可列出集合中的全部元素，通过定义得出集合之间的关系.

2.元素特征法

确定集合的代表元素是什么，弄清集合元素的特征，再利用集合元素的特征判断关系.

一般地，设 $A=\{x\mid p(x)\}$，$B=\{x\mid q(x)\}$，①若由 $p(x)$ 可推出 $q(x)$，则 $A\subseteq B$；②若由 $q(x)$ 可推出 $p(x)$，则 $B\subseteq A$；③若 $p(x)$，$q(x)$ 可互相推出，则 $A=B$；④若由 $p(x)$ 推不出 $q(x)$，由 $q(x)$ 也推不出 $p(x)$，则集合 A,B 无包含关系.

3.数形结合法

利用 Venn 图或数轴能直观地判断集合间的关系. 一般地，判断不等式的解集之间的关系适合画出数轴.

例 1　判断下列集合间的关系.

(1) $A=\left\{x\mid x=\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$，$B=\left\{x\mid x=\dfrac{k}{4}+\dfrac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$；

(2) $A=\{x\mid -3\leqslant x<5\}$，$B=\{x\mid -1<x<2\}$；

(3) $M=\left\{x\mid x=2m+\dfrac{1}{3},m\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{x\mid x=n-\dfrac{2}{3},n\in\mathbf{Z}\right\}$，$P=\left\{x\mid x=p+\dfrac{1}{3},p\in\mathbf{Z}\right\}$.

解析　(1) **解法一**（列举观察法）：取 $k=\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots$，可得 $A=\left\{\cdots,-\dfrac{5}{4},-\dfrac{3}{4},-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{4},\dfrac{7}{4},\cdots\right\}$，$B=\left\{\cdots,-\dfrac{1}{4},0,\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4},1,\dfrac{5}{4},\cdots\right\}$，

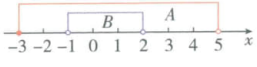
易知 A 中任一元素均为 B 中的元素，但 B 中的有些元素不在 A 中，故 $A\subsetneq B$.

解法二（元素特征法）：集合 A 中的元素为 $x=\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{2k+1}{4}(k\in\mathbf{Z})$，集合 B 中的元素为 x

$=\frac{k}{4}+\frac{1}{2}=\frac{k+2}{4}(k\in\mathbf{Z})$，而 $2k+1(k\in\mathbf{Z})$ 为奇数，$k+2(k\in\mathbf{Z})$ 为整数，所以 $A\subsetneq B$.

奇数集是整数集的真子集.

(2)(数形结合法)将集合 A,B 在数轴上表示出来，如图所示，由图可知 $B\subsetneq A$.



(3)(元素特征法)易知 $M=\left\{x\middle|x=(2m+1)-\frac{2}{3},m\in\mathbf{Z}\right\}$，$P=\left\{x\middle|x=(p+1)-\frac{2}{3},p\in\mathbf{Z}\right\}$，

【一题多解】 M,P 不变形，把 N 转化为 P 的形式，即 $N=\left\{x\middle|x=(n-1)+\frac{1}{3},n\in\mathbf{Z}\right\}$.

而 $2m+1(m\in\mathbf{Z})$ 为奇数，$p+1(p\in\mathbf{Z})$ 为整数，$n(n\in\mathbf{Z})$ 为整数，

所以 $M\subsetneq N=P$.

温馨提示

画数轴判断集合间的关系时，注意实心点与空心圈的区别.当包含等号时用实心点，不包含等号时用空心圈.

2 由集合间的关系求参数的值或范围 ★★★

1.若集合是有限集，则根据集合间的关系，列出方程(组)求解，解题时还要注意考虑集合中元素的互异性.

2.若集合是用不等式描述的，则通常借助数轴进行分析，将各个集合在数轴上表示出来，以形定数，还要注意验证端点值是否符合题意.

3.对于“$A\subseteq B$”或“$A\subsetneq B$”的问题，若集合 A 中含有参数，通常要分 $A=\varnothing$ 和 $A\neq\varnothing$ 两种情况进行讨论，其中 $A=\varnothing$ 的情况容易被忽略，应引起足够的重视.

例 2 (1)(2023 新课标Ⅱ,2)设集合 $A=\{0,-a\}$，$B=\{1,a-2,2a-2\}$，若 $A\subseteq B$，则 $a=$ (　　)

A.2　　B.1　　C.$\frac{2}{3}$　　D.-1

(2)已知集合 $A=\{x\mid-2\leqslant x\leqslant7\}$，$B=\{x\mid m+1<x<2m-1\}$.若 $B\subseteq A$，则实数 m 的取值范围为_____.

解析 (1)$\because A\subseteq B,A=\{0,-a\}$，$\therefore 0\in B$.

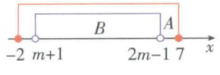
当 $a-2=0$，即 $a=2$ 时，$A=\{0,-2\}$，$B=\{1,0,2\}$，不满足 $A\subseteq B$，舍去；

当 $2a-2=0$，即 $a=1$ 时，$A=\{0,-1\}$，$B=\{1,-1,0\}$，满足 $A\subseteq B$.

综上，$a=1$，故选 B.

(2)当 $B=\varnothing$ 时，$m+1\geqslant2m-1$，解得 $m\leqslant2$，满足题意；

当 $B\neq\varnothing$ 时，如图，因为 $B\subseteq A$，



所以 $\begin{cases}m+1\geqslant-2,\\2m-1\leqslant7,\\m+1<2m-1,\end{cases}$ 解得 $2<m\leqslant4$.

综上，实数 m 的取值范围为 $\{m\mid m\leqslant4\}$.

答案 (1)B　(2)$\{m\mid m\leqslant4\}$

3 有限集合的子集、真子集个数 ★★

1.当集合中元素个数有限时，其子集、真子集个数必为确定的，结论如下(其中 $n\in\mathbf{N}^*$)：

1)含有 n 个元素的集合有 2^n 个子集；

2)含有 n 个元素的集合有 (2^n-1) 个真子集；

3)含有 n 个元素的集合有 (2^n-1) 个非空子集；

4)含有 n 个元素的集合有 (2^n-2) 个非空真子集.

2.对于有限集 A,B,C，设集合 A 中含有 n 个元素，集合 B 中含有 m 个元素($m,n\in\mathbf{N}^*$，且 $m<n$).若 $B\subseteq C\subseteq A$，则满足条件的集合 C 的个数为 2^{n-m}；若 $B\subseteq C\subsetneq A$，则满足条件的集合 C 的个数为 $2^{n-m}-1$；若 $B\subsetneq C\subsetneq A$，则满足条件的集合 C 的个数为 $2^{n-m}-2$.

例 3 (1)(多选题)(2026 江苏淮安涟水一中月考)已知集合 $A=\{x\mid-1\leqslant2x-1\leqslant5,x\in\mathbf{Z}\}$，则下列说法正确的有　　(　　)

A.$1\in A$　　B.$\{2,3\}\subseteq A$

C.A 中有 3 个元素　　D.A 有 16 个真子集

(2)已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0, x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid 0<x<5, x\in\mathbf{N}\}$，则满足条件 $A\subseteq C\subsetneq B$ 的集合 C 的个数为 （ ）

A.1　　B.2

C.3　　D.4

解析 (1)由 $-1\leqslant 2x-1\leqslant 5$，得 $0\leqslant x\leqslant 3$，

又 $x\in\mathbf{Z}$，$\therefore A=\{0,1,2,3\}$，

故 $1\in A$，$\{2,3\}\subseteq A$，A 中有 4 个元素，A 有 $2^4-1=15$ 个真子集，故选 AB.

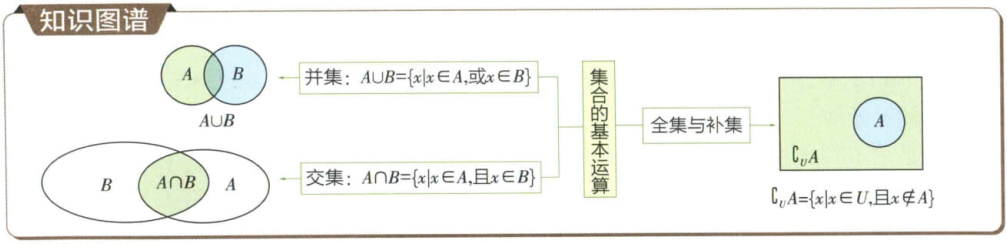
(2)由 $x^2-3x+2=0$，得 $x=1$ 或 $x=2$，$\therefore A=\{1,2\}$.

由题意知 $B=\{1,2,3,4\}$，$\therefore$ 满足条件的集合 C 可以是 $\{1,2\}$，$\{1,2,3\}$，$\{1,2,4\}$，共 3 个.

答案 (1)AB　(2)C

1.3 集合的基本运算

知识图谱



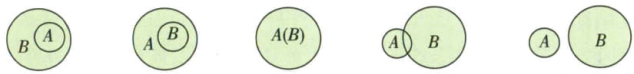
必备知识 清单

1 并集 ★★★

1.**定义**：一般地，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$（读作“A 并 B”）.

2.**符号表示**：$A\cup B=\{x\mid x\in A,\text{或 } x\in B\}$.

3.**图形表示**：用 Venn 图表示 $A\cup B$ 的几种不同情形如下（图中阴影部分表示集合 A 与 B 的并集）：



4.**并集的性质**

1)交换律：$A\cup B=B\cup A$；　2)结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

3)$A\cup A=A$；　4)$A\cup\varnothing=\varnothing\cup A=A$；

5)$A\subseteq(A\cup B)$，$B\subseteq(A\cup B)$；6)$B\subseteq A\Leftrightarrow A\cup B=A$，$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$.

2 交集 ★★★

1.**定义**：一般地，由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$（读作“A 交 B”）.

2.**符号表示**：$A\cap B=\{x\mid x\in A,\text{且 } x\in B\}$.

深度剖析　对并集的理解

1.不能简单地认为 $A\cup B$ 是由 A 中的所有元素和 B 中的所有元素放在一起组成的集合，由集合中元素的互异性知，应把重复元素看作一个元素.

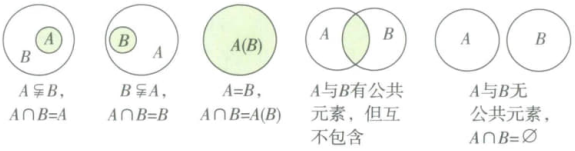
2.“$x\in A$，或 $x\in B$”包含三种情况：“$x\in A$ 但 $x\notin B$”“$x\in B$ 但 $x\notin A$”“$x\in A$ 且 $x\in B$”.与生活中“或”含义不同，生活用语中“或”是“或此”“或彼”只取其一，并不兼存.

深度剖析　对交集的理解

1.交集概念中的“且”即“同时”的意思，两个集合交集中的元素必须同时是两个集合中的元素.

2.交集概念中的“所有”二字不能省略，否则将会漏掉一些元素，一定要将相同的元素全部找出来.

3.图形表示：用 Venn 图表示 $A\cap B$ 的几种不同情形如下（图中阴影部分表示集合 A 与 B 的交集）：



4.交集的性质

1）交换律：$A\cap B=B\cap A$；　2）结合律：$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

3）$A\cap A=A$；　4）$A\cap\varnothing=\varnothing\cap A=\varnothing$；

5）$(A\cap B)\subseteq A,(A\cap B)\subseteq B$；6）$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A,B\subseteq A\Leftrightarrow A\cap B=B$.

3 全集与补集 ★★★

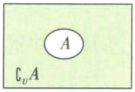
1.全集的定义：一般地，如果一个集合含有所研究问题中涉及的所有元素，那么就称这个集合为全集，通常记作 U.

2.补集的定义：对于一个集合 A，由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集，简称为集合 A 的补集.

补集是全集的子集.　补集是相对的.

3.补集的符号表示：$\complement_U A=\{x\mid x\in U,\text{且}\ x\notin A\}$，其中 $\complement_U A$ 表示集合 A 相对于全集 U 的补集.

4.补集的图形表示：图中阴影部分表示集合 A 相对于全集 U 的补集.



5.补集的性质

性质	含义
$A\cup(\complement_U A)=U$	一个集合与其补集的并集是全集
$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$	一个集合与其补集的交集是空集
$\complement_U(\complement_U A)=A$	一个集合的补集的补集是其本身
$\complement_U U=\varnothing$	全集的补集是空集
$\complement_U\varnothing=U$	空集的补集是全集
$A\subseteq B\Leftrightarrow(\complement_U A)\supseteq(\complement_U B)$	在同一全集中，任何集合的补集是其子集的补集的子集
$A\subseteq\complement_U B\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$	若一个集合是另一个集合补集的子集，则这两个集合的交集为空集
$A=B\Leftrightarrow\complement_U A=\complement_U B$	在同一全集中，相等集合的补集也相等



通常把给定的集合作为全集.研究的问题不同，全集也就不同.

深度剖析　对全集与补集的理解

1.求集合 A 的补集的前提是“A 是全集 U 的子集”，集合 A 其实是给定的条件.从全集 U 中取出集合 A 的全部元素，剩下的元素构成的集合即为 $\complement_U A$.

2.补集 $\complement_U A$ 是针对给定的集合 A 和 $U(A\subseteq U)$ 而言的一个概念，一个确定的集合 A，对于不同的集合 U，它的补集不同.

关键能力　拓展

1 集合运算的方法 ★★★

1.若集合中的元素是有限的，则可以一一列举出来，进行运算.

2.若集合中的元素是离散的，则常用 Venn 图求解.