浙大数学优辅

本书荣获浙江大学出版社年度最佳图书奖
高效能品牌图书TOP榜“专题专项类”金奖

配视频讲解

导数的秘密

高中数学新体系（修订版）

数学小丸子 主编
王海刚（数学小丸子）
陈宇轩（2019年高考数学147分）
编写

一条主线贯穿全书 → 解题中经常使用的各类不等式来源及其证明过程

243道例题精讲
81道思考题精练 → 归纳出不易掌握或在解题上经常出现问题的重点

紧扣命题重点 → 设计了一些原创试题以及素材试题

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

序　言

函数与导数试题涵盖众多核心知识点，蕴含函数与方程、分类讨论、数形结合等丰富数学思想，题型丰富多样. 在日常学习中，同学们或多或少积累了一些解题方法与技巧. 而在高考有限的考试时间里，能否快速判断题型类型、选定最优解题方案、高效节约时间并实现分数最大化，成为决胜导数大题的关键.

通常而言，攻克导数试题需遵循以下核心流程：

(1)精准识别试题类型

解答导数试题前，首要任务是明确题目所属类别，梳理解题所需的知识与方法储备. 一般来说，精准判定题型类型，基本就能锁定解题的核心方向与方法路径.

(2)深度复盘已解问题

解题过程中，若无法快速确定题型，便难以精准匹配解题方法. 此时，需回溯过往做过的同类题目，从其解题思路中提炼突破口，举一反三、迁移应用.

本书聚焦函数与导数试题的常见类型与对应处理方法，针对高考热点、难点问题展开系统解读与深度总结.

一、本书核心架构

本书以“教材夯实—方法突破—综合创新”为核心主线，构建了层次清晰、逻辑闭环的知识体系. 全书共九章，搭配三大专属附录，形成“基础筑牢—技巧精进—综合应用”的阶梯式成长路径，适配不同阶段学习需求.

1. 章节内容详解

第一章立足选择性必修导数核心知识点，系统拆解教材基础内容，深度梳理课本题目与高

考真题的演变脉络，搭建“课本—真题”的闭环学习链路. 聚焦基础函数不等式的证明逻辑，详解不等式构建的核心方法，同步规范导数高频题型的解题步骤与专业术语，为后续进阶学习筑牢知识根基与表达规范.

第二章以函数不等式为核心载体，全面覆盖构造函数、分拆函数、放缩法、隐零点代换、局部除最值、极值点显化、加强不等式、主元转换、零点差分析等关键解题技法. 通过典型例题拆解各类方法的适用场景与推演逻辑，实现从“会用不等式”到“活用不等式”的能力跃迁，打造导数解答题的核心解题工具库.

第三章主攻恒成立、零点、双参数、最值求解等导数高频核心题型，系统讲解分类讨论、放缩法等核心解题策略，新增放缩法专项应用拓展. 拆解多变量、含参问题的破题逻辑，整合前两章核心方法形成解题闭环，助力读者攻克导数解答题中的基础综合模块.

第四章聚焦取点技巧在导数问题中的实战价值，以零点存在性定理为核心，详解取点法在极限问题、恒成立问题中的应用场景. 针对指数与对数函数交点问题展开严谨论证，破解取点“无思路、不严谨”的痛点，强化解题过程的逻辑完备性.

第五章从基础极值点偏移问题切入，延伸至拐点偏移等进阶题型，系统梳理常规解法与高阶技巧. 针对高难度偏移问题，拆解“对称构造、比值换元、差值代换”等深度解法，打通基础模型到压轴难题的解题链路，攻克导数压轴题核心难点.

第六章跨界整合三角函数与导数知识，覆盖恒成立、不等式证明、极值点偏移、零点分析、递推不等式与数列不等式、极值最值求解等多元题型. 聚焦两类知识的交叉应用逻辑，拆解三角函数有界性、周期性与导数工具的结合点，拓宽导数综合题的解题视野.

第七章专注导数问题中的计算精度与估值技巧，涵盖数字不等式、三角函数估值、数列估值、方程估值等核心模块. 详解估值的核心思路与常用方法，解决“算不准、估不出”的解题痛点，强化导数问题中数值分析的严谨性与实用性.

第八章聚焦函数与导数客观题的解题规律，围绕三次函数性质、函数奇偶性、单调性、极值最值等核心考点，梳理快速解题技巧与易错点. 补充专属客观题的解题方法，实现“主观题攻坚＋客观题提速”的全面提升，适配高考客观题得分需求.

第九章立足学科内综合与跨模块创新，涵盖导数创新题、学科交叉题（如导数与向量结合）等多元内容. 拆解创新题型的命题逻辑与破题关键，挖掘跨模块知识的内在关联，培养读者的发散思维与知识迁移能力，精准适配高考命题创新趋势.

2. 试题的来源方面

高考导数试题的常见来源为高考命题人的原创题、国内外与导数相关的试题的改编以及高等数学问题研究的副产品. 针对这种情况,本书的选题来源为高考真题、优质的模拟题、国内外竞赛题、数学杂志中的试题、部分大学数学学科的选拔试题.

3. 试题选材与解法

选题来源:本书精选高考真题、优质模拟题、国内外竞赛题、数学杂志经典试题及部分大学数学学科选拔试题,覆盖高考导数试题的核心来源,贴合高考备考实际.

解法特色:书中例题及思考题的解法均为编者原创;高考真题、联赛真题、模拟试题的标准答案可通过官方权威渠道查询,本书不再赘述. 导数解题无固定模式,鼓励读者在借鉴方法的基础上探索个性化思路,内化为自身解题能力,这是掌握导数知识的科学路径.

4. 附录核心价值

附录包含命题素材、原创试题与必备不等式三部分. 命题素材紧贴高考命题导向,原创试题聚焦高频考点与创新视角,必备不等式覆盖全书核心解题工具. 附录既为一线教师提供命题创作的思路参考,也为读者提供拓展练习与深度探究资源,助力深化理解、强化训练,实现知识与能力的双重巩固.

二、高中生高效学习导数的建议

1. 要对函数基础知识有较为扎实的把控与理解. 函数是导数知识的核心基石,其基本概念是学习导数的必备前提. 若函数基础不扎实、理解不透彻,导数学习便会沦为“无源之水、无本之木”,难以达到理想学习效果.

2. 要仔细理解导数的基本概念,适当接触高观点. 相较于函数基础,导数知识更具思辨性,且与高等数学联系紧密. 仅靠高中知识完全透彻理解导数存在一定难度,易出现理解片面、细致度不足的问题. 建议在掌握导数基础的同时,选取优质参考资料,自主或在老师指导下探究部分高观点知识,深化对导数本质的理解.

3. 要进行扎实的训练,多见题型多反思. 需有意识地开展导数习题练习,遵循“由易到难、全面细致”的原则,尽可能多见各类题型. 同时注重复盘新题、错题,总结解题规律,提升解题熟练度与知识应用能力.

4. 加强对历年试题和常见函数模型研究. 深入揣摩历年高考导数试题，总结命题特点与规律，重点钻研核心函数模型. 吃透原始模型的本质，就能灵活应对高考中千变万化的衍生试题.

5. 注重转化过程中的“三变”

①求变善变：通过转化解决问题的基本方法不受常规方法约束，要敢于尝试，善于从诸多方法中选择最适合解决当前问题的方法；

②变中有变：任何一种方法在处理具体问题时都不是一成不变的，有些问题可能会以更陌生、更复杂、更抽象、更不协调的形式出现，要善于应变；

③变中不变：转化的目的是不变的，即为了使原来无法解决或难以解决的问题得以解决，比如不等式证明，转化时要保证式子的变形是有效的.

6. 精研教材并发掘教材中蕴含的思想方法. 教材中蕴含分离参数法、最值转化法、消元法、换元法、函数法、主元法、分析法等实用解题方法，以及函数方程、数形结合、分类讨论、转化等核心数学思想，需反复钻研、熟练应用.

7. 培育导数解题六大核心要素：

①全面的基础知识：精准理解数学概念、运算规则与数量关系；

②扎实的运算技能：明晰运算逻辑，掌握运算原理；

③熟练的运算能力：实现运算过程的高效、精准、合理；

④积极的学习态度：以勤奋务实的态度攻克每一道简单题与难题；

⑤灵活的推理能力：具备逻辑思考、分析判断与反思总结能力；

⑥系统的策略思维：提升数学问题的表达与解题规划能力.

在“三新”的教学实践下，本书结合新高考要求与培优教学实际完成全面修订，内容更贴合高考备考与培优学习需求. 在此，特别感谢所有助力本书打磨的伙伴们，你们的信任与实战反馈为书稿修订校准了核心方向；感谢王梓涵、王韵涵、丁培鑫等同学以优异成绩与实战视角，为本书培优方向、解题思路把关校准；感谢福建、广东、浙江、内蒙古等多地培优课学子，你们的备考重点与提分诉求为书稿注入多元视角，相关建议已择优采纳，让本书适配多地域尖子生冲刺需求；感谢东北育才孙诗越同学，在书稿修订期间提出的宝贵建议，为本书优化提供了重要参考.

为满足更多读者的需求，我们录制了与本书相关的视频讲座，可在 B 站搜“导数的秘密”观看. 欢迎加入“高中数学新体系”图书交流 QQ 群（群号码 821526438），就书中内容进行研讨.

王海刚、陈宇轩

目录 Contents

第一章 导数基础知识概览——从教材沃土到高考殿堂 …… 1
1.1 从课本题目到高考真题 …… 1
1.2 基础不等式的证明 …… 18
1.3 建立函数不等式的方法 …… 46
第二章 妙话函数不等式——驾驭高考导数题的利刃 …… 55
2.1 构造函数 …… 55
2.2 分拆函数 …… 60
2.3 不等式放缩 …… 63
2.4 隐零点代换 …… 74
2.5 局部求值 …… 76
2.6 整体代换 …… 80
2.7 极值点显化 …… 84
2.8 加强不等式 …… 86
2.9 主元转换 …… 89
2.10 零点差问题 …… 94
第三章 恒成立问题面面观——从统一策略到分类破局 …… 100
3.1 普通恒成立问题 …… 100
3.2 直接讨论法 …… 108
3.3 显零点问题 …… 111

目录

Contents

3.4 双参数最值问题 …… 113

3.5 整数最值问题 …… 115

3.6 放缩法 …… 118

第四章 取点手段的多彩应用——于无声处听惊雷 …… 124

4.1 极限问题与零点问题 …… 124

4.2 恒成立问题 …… 149

4.3 切线问题 …… 160

4.4 指数函数与对数函数图象交点问题的严谨论证 …… 163

第五章 偏移问题对策多——对称破缺中的数学秩序 …… 168

5.1 常见极值点偏移问题通法例解 …… 168

5.2 解法在实际应用中选择 …… 173

5.3 变形后的极值点偏移 …… 177

5.4 脱胎于极值点偏移的双变量问题 …… 181

5.5 极值点偏移的“孪生兄弟”——拐点偏移 …… 190

5.6 极值点偏移问题解法的深入探究 …… 195

第六章 三角函数在导数问题中的身影——优雅与复杂共舞 …… 211

6.1 恒成立问题 …… 211

6.2 函数不等式证明 …… 216

6.3 极值点偏移问题 …… 223

目录 Contents

6.4 零点问题 …… 226
6.5 递推关系不等式与数列不等式 …… 230
6.6 极值与最值 …… 234
第七章 计算与估值联袂登场——从定性分析到定量计算 …… 239
7.1 数字不等式 …… 239
7.2 三角函数中的估值问题 …… 245
7.3 数列中的估值问题 …… 247
7.4 方程中的估值问题 …… 251
第八章 函数与导数客观题——于精微处见真章 …… 257
8.1 简单数论 …… 257
8.2 恒成立 …… 258
8.3 极限问题 …… 260
8.4 三次函数 …… 262
8.5 函数零点 …… 263
8.6 函数奇偶性与单调性 …… 265
8.7 函数对称性 …… 266
8.8 函数有界性 …… 266
8.9 引入参数 …… 267
8.10 构造函数 …… 269

目录 Contents

8.11 抽象函数单调性 …… 271
8.12 切线问题 …… 272
8.13 极值与最值 …… 274
8.14 整数问题 …… 276
8.15 嵌套函数 …… 277
第九章 导数的综合——应用与创新 …… 279
附 录 …… 297
附录 1 命题素材 …… 297
附录 2 原创试题 …… 301
附录 3 必备不等式 …… 305
思考题解答 …… 309
参考文献 …… 329



扫码观看视频讲解

第一章

导数基础知识概览

——从教材沃土到高考殿堂

导数，作为微积分的核心内容，其价值不仅在于以精确定义刻画函数变化率，更在于为解决复杂函数问题提供了普适且强大的思维工具与解题范式. 本章将引领读者从导数思想的本源出发，系统梳理核心基础知识，为后续的深度应用与拓展探究筑牢根基. 我们的学习旅程将始于对教材的深度挖掘，高考命题“源于教材，高于教材”的核心理念，在此将得到充分印证. 我们将重新审视教材中的典型例题与习题，拆解其中蕴含的数学思想与解题方法，探寻其如何通过提炼、重组与延伸，最终演变为高考真题中具有综合性、挑战性的压轴问题. 在此基础上，我们将聚焦构建导数应用体系的关键支撑——基础不等式. 最终，将系统性探讨不等式建立的核心逻辑与方法：从利用函数单调性、极值、最值推导不等式，到结合积分思想拓展不等式构建路径，帮助读者掌握从函数动态变化规律中提炼静态不等关系的能力.

1.1 从课本题目到高考真题

(1)切线问题

例题 1 已知函数 $f(x)=x^2$，而 l 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，且直线 l 经过点 $(3,5)$.

(1)判断 $(3,5)$ 是不是曲线 $y=f(x)$ 上的点.

(2)求直线 l 的方程.

解答 (1)因为 $f(3)=9\neq 5$，所以 $(3,5)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 上的点.

(2)由于 $(3,5)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 上的点，因此 $(3,5)$ 不是切点. 设切点为 (x_0,x_0^2)，由 $f'(x)=2x$ 知，切线的斜率 $k=2x_0$，切线方程为

$$y-x_0^2=2x_0(x-x_0).$$

由于点 $(3,5)$ 在切线上，因此有 $5-x_0^2=2x_0(3-x_0)$，整理得

$$x_0^2-6x_0+5=0,$$

解得 $x_0=1$ 或 $x_0=5$. 故切点为(1,1)或(5,25)，切线方程为 $y-25=10(x-5)$ 或 $y-1=2(x-1)$，即直线 l 的方程为

$$10x-y-25=0 \text{ 或 } 2x-y-1=0.$$

注 1 由于题目中的点(3,5)并不在曲线上，因此(3,5)不会是切点，故可以设出切点 (x_0,x_0^2)，写出切线方程，然后利用切线经过点(3,5)，求出切点坐标，进而得出切线方程. 切线问题要注意“过”与“在”的字眼. 一般说来，如果求曲线在该点处的切线方程，那么该点是切点；如果求曲线过某点的切线方程，可以分为两种情况：该点在曲线上与该点不在曲线上.

例如：已知函数 $f(x)=x^3$，求曲线 $y=f(x)$ 在点(1,1)处的切线方程. 对本题直接求导求出切线斜率即可，斜率与切点都明确了，则切线方程便解决了. 如果求曲线 $y=f(x)$ 过点(2,3)的切线方程，易知点(2,3)不在曲线 $y=f(x)$ 上，因此(2,3)不是切点，故设出切点为 (x_0,x_0^3)，仿照例题 1 的解答过程便可解决. 如果求曲线 $y=f(x)$ 过点(2,8)的切线方程，由于点(2,8)在曲线 $y=f(x)$ 上，此时可以分为两种情况. 一种是(2,8)为切点，此时切线的斜率为 $f'(2)=12$，则切线的方程为 $y-8=12(x-2)$，整理有 $y=12x-16$. 有时利用均值不等式也可以得出幂函数的切线方程. 比如利用 $x=2$ 作为取等条件，$x^3+8+8\geqslant 3\sqrt[3]{x^3\times 8\times 8}=12x$，则有 $x^3\geqslant 12x-16$，其中 $y=12x-16$ 为切线方程. 另一种是(2,8)不是切点，此时设切点为 (x_0,x_0^3)，切线方程为 $y-x_0^3=3x_0^2(x-x_0)$，而点(2,8)在切线上，因此有 $8-x_0^3=3x_0^2(2-x_0)$，解得 $x_0=-1$ 或 $x_0=2$(舍去)，故切线方程为 $y+1=3(x+1)$.

注 2 与切线相关的全国高考题有：

1. (2007 年全国卷Ⅱ(理)22)已知函数 $f(x)=x^3-x$.

(1)求曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(t,f(t))$ 处的切线方程.

(2)设 $a>0$，如果过点 (a,b) 可作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线，证明：$-a<b<f(a)$.

2. (2009 年全国卷Ⅰ(文)21)已知函数 $f(x)=x^4-3x^2+6$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性.

(2)设点 P 在曲线 $y=f(x)$ 上，若该曲线在点 P 处的切线通过坐标原点，求 l 的方程.

3. (2013 年课标全国卷Ⅱ(文)21)已知函数 $f(x)=x^2e^{-x}$.

(1)求 $f(x)$ 的极小值与极大值.

(2)当曲线 $y=f(x)$ 的切线 l 的斜率为负数时，求 l 在 x 轴上截距的取值范围.

4. (2021 年全国卷乙卷(文)21)已知函数 $f(x)=x^3-x^2+ax+1$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性.

(2)求曲线 $y=f(x)$ 过坐标原点的切线与曲线 $y=f(x)$ 的公共点的坐标.

例题 2 分别求满足下列条件的直线 l 的方程.

(1)过原点且与曲线 $y=\ln x$ 相切.

(2)斜率为 e[①] 且与曲线 $y=e^x$ 相切.

解答　(1)设切点为$(x_0,\ln x_0)$,求导得

$$y'=\frac{1}{x}.$$

切线的斜率为$\frac{\ln x_0-0}{x_0-0}=\frac{1}{x_0}$,则

$$x_0=e.$$

故切点为(e,1),切线方程为

$$y=\frac{1}{e}x.$$

(2)设切点为(x_0,e^{x_0}),求导得

$$y'=e^{x_0}=e,$$

解得

$$x_0=1.$$

故切点为(1,e),切线方程为 $y-e=e(x-1)$,即

$$y=ex.$$

注　第(1)问设出切点,以切线斜率为纽带建立方程,求出切点坐标,进而求出切线方程.由于函数 $y=\ln x$ 是上凸函数,因此可以得出不等式 $\ln x\leqslant\frac{x}{e}$.由函数图象的凹凸性可以建立一些不等式,函数 $y=\ln x$ 常见的切线不等式有斜率为 1 的切线,即切点为(1,0);斜率为$\frac{1}{e}$的切线,即切点为(e,1).在后面章节我们会提出曲线 $y=\ln x$ 在点$(x_0,\ln x_0)$处的切线方程的通式为 $y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$,即 $y=\frac{1}{x_0}x+\ln x_0-1$.通过对 x_0 的赋值,我们可以得出一些切线方程,进而建立不等式,但并不需要读者掌握过多,仅仅提供一种建立简单函数不等式的方法.

例题 3　已知抛物线 $C_1:y=x^2+2x$ 和 $C_2:y=-x^2+a$,若直线 l 同时是抛物线 C_1 和 C_2 的切线,则称直线 l 是抛物线 C_1 和 C_2 的公切线.问:当 a 取什么值时,抛物线 C_1 和 C_2 有且仅有一条公切线?写出此公切线方程.

解答　设直线 l 与抛物线 C_1 相切于点 $A(x_1,x_1^2+2x_1)$,对抛物线 C_1 的方程求导得

$$y'=2x+2,$$

则抛物线 C_1 在点 A 处的切线方程为 $y-(x_1^2+2x_1)=(2x_1+2)(x-x_1)$,整理有

$$y=(2x_1+2)x-x_1^2\quad①.$$

设直线 l 与抛物线 C_2 相切于点 $B(x_2,-x_2^2+a)$,对抛物线 C_2 的方程求导得

① 若无特殊说明,则本书中的 e 均指自然对数的底数.

$$y'=-2x,$$

则抛物线 C_2 在点 B 处的切线方程为 $y-(-x_2^2+a)=-2x_2(x-x_2)$，整理有

$$y=-2x_2x+x_2^2+a \quad ②.$$

其中①②都是切线 l 的方程，则有

$$\begin{cases}2x_1+2=-2x_2,\\-x_1^2=x_2^2+a.\end{cases}$$

消去 x_2 并整理得

$$2x_1^2+2x_1+a+1=0.$$

令 $\Delta=4-8(a+1)=0$，得 $a=-\frac{1}{2}$. 从而 $x_1=-\frac{1}{2}$，此时公切线方程为

$$y=x-\frac{1}{4}.$$

注 1 本题求出两条抛物线各自的切线方程，在斜率存在的情况下，由点斜式到斜截式，而后通过斜率与截距相等建立方程. 解决公切线相关问题，可以采取此方法.

注 2 （2019 年全国卷Ⅱ（理）20）已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{x+1}{x-1}$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性，并证明函数 $f(x)$ 有且仅有两个零点.

（2）设 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点，证明：曲线 $y=\ln x$ 在点 $(x_0,\ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的切线.

（2）近似计算——以直代曲思想

例题 4 已知 $f(x)=\sqrt{x}$，求 $f(9.05)$ 的近似值.

解答 我们要计算 $f(9.05)=\sqrt{9.05}$ 的近似值，可以借助 $f(9)=3$，$f'(9)=\frac{1}{6}$ 和 $\Delta x=0.05$ 来实现，即

$$f(9.05)=f(9+0.05)\approx f(9)+f'(9)\times 0.05=3+\frac{0.05}{6}\approx 3.008.$$

注 1 利用以直代曲的思想，在 9.05 附近对 9 进行简单的逼近. 实际上，由均值不等式 $\sqrt{x}\cdot 3\leqslant\frac{x+9}{2}$ 知 $\sqrt{x}\leqslant\frac{x+9}{6}$，所以 $f(9.05)$ 的真实值小于 $3.008\dot{3}$. 函数图象与相关切线的位置关系与函数的凹凸性有关，对此后面的章节有相应的介绍.

注 2 与估值问题相关的全国卷高考题有：

（2014 新课标卷Ⅱ（理）21）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性.

（2）设 $g(x)=f(2x)-4bf(x)$，当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，求 b 的最大值.

（3）已知 $1.4142<\sqrt{2}<1.4143$，求 $\ln 2$ 的近似值（精确到 0.001）.

(3)抽象函数

例题 5　若函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上可导，且满足 $f(x)-xf'(x)>0$，判断 $3f(1)$与 $f(3)$的大小.

解答　当 $x>0$ 时，由 $f(x)-xf'(x)>0$ 知

$$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0,$$

即

$$\left[\frac{f(x)}{x}\right]'<0.$$

令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}+C$(C 为常数)，则 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，故 $g(3)<g(1)$，即有

$$\frac{f(3)}{3}<\frac{f(1)}{1},f(3)<3f(1).$$

注 1　本题中的 $f(x)-xf'(x)>0$ 代表着函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}+C$ 在区间$(0,+\infty)$上单调递减，其中 C 为常数，常数 C 对函数的单调性无影响. 一般令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$即可.

注 2　若 $f(x)+xf'(x)>0$，则可以构造函数 $g(x)=xf(x)$；

若 $f(x)+f'(x)>0$，则可以构造 $g(x)=\mathrm{e}^xf(x)$；

若 $f(x)<f'(x)$，则可以构造函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$；

若 $f(x)<2f'(x)$，则可以构造函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}$；

若 $f(x)<f'(x)\tan x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则可以构造函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{\sin x}$

……

抽象函数题目的形式有很多，有些问题的解决方法需要具体问题具体分析.

下面我们说明由 $f(x)<f'(x)\tan x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$构造函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{\sin x}$的原因.

由 $f(x)<f'(x)\tan x$ 知 $f'(x)\sin x-f(x)\cos x>0$，对比求导运算法则，相减的运算可能是$[f(x)-g(x)]'$，也可能是$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'$，通过对比知原不等式符合“上导下不导”，即有$\left[\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]'=\dfrac{f'(x)\sin x-f(x)\cos x}{\sin^2x}>0$，因此可以构造函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{\sin x}$.

(4)具体函数

(1) $y=\dfrac{\sin x}{x}$；　(2) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$；　(3) $y=\dfrac{\ln x}{x}$；　(4) $y=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$；

(5) $y=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$；　(6) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$；　(7) $y=x\mathrm{e}^x$；　(8) $y=x\ln x$；

(9) $y=x^2e^x$；　　(10) $f(x)=\ln x-x$；　　(11) $f(x)=e^x-x-1$.

读者可以探究上述函数的性质，包括单调性、奇偶性、对称性、凹凸性和有界性，求出函数极值、最值、拐点，并作出函数的图象. 比如函数 $y=x\ln x$ 的最小值为 $-\frac{1}{e}$，取等条件为 $x=\frac{1}{e}$；函数 $y=\frac{x}{e^x}$ 的最大值为 $\frac{1}{e}$，取等条件为 $x=1$. 通过比较这两个函数的最值，我们得到不等式 $x\ln x>\frac{x}{e^x}-\frac{2}{e}$. 此不等式出现在 2014 年新课标卷 I(理)21：

设函数 $f(x)=ae^x\ln x+\frac{be^{x-1}}{x}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=e(x-1)+2$.

(1) 求 a,b.

(2) 证明：$f(x)>1$.

(5) 函数单调性

例题 6　讨论 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+a\ln x-(a+1)x, a\neq 0$ 的单调性.

解答　对 $f(x)$ 求导得

$$f'(x)=\frac{(x-1)(x-a)}{x}(x>0).$$

①当 $a<0$ 时，

若 $0<x<1$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；若 $x>1$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

②当 $0<a<1$ 时，

若 $0<x<a$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；若 $a<x<1$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；若 $x>1$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

③当 $a=1$ 时，

$$f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x}\geqslant 0,$$

$f(x)$ 单调递增.

④当 $a>1$ 时，

若 $0<x<1$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；若 $1<x<a$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；若 $x>a$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

注　对原函数求导，通分后可以得出 $(x-1)(x-a)=0$ 的根为 1 和 a. 其中 1 为定义域内的点，a 为参数. 根据 a 是否在定义域内可以分为两大类：一类为 $a<0$，另一类为 $a>0$. 在 $a>0$ 的情况中，需要讨论 a 与 1 的大小关系. 分类讨论，要做到不重不漏.

例题 7　证明函数 $y=2x+\sin x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

证明　对 y 求导得

$$y'=2+\cos x>0,$$

则函数 $y=2x+\sin x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

注　由余弦函数的有界性知 $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$，因此有 $2+\cos x\geqslant 1>0$. 在处理三角函数与导数的问题中，要注意利用三角函数自身的有界性.

例题 8　已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且 $f'(x)>0$ 在区间 $(-1,2)$ 上恒成立，判断 $f(0)$ 与 $f(1)$ 的大小.

解答　若 $f'(x)>0$ 在区间 $(-1,2)$ 上恒成立，则 $f(x)$ 在区间 $(-1,2)$ 上单调递增. 而 $1>0$，因此

$$f(1)>f(0).$$

例题 9　已知关于 x 的函数 $y=x^3-t^2x-tx^2+t^3$ 在区间 $(-1,3)$ 上单调递减，求 t 的取值范围.

解答　令 $f(x)=x^3-t^2x-tx^2+t^3$，求导得

$$f'(x)=3x^2-t^2-2tx.$$

由题意知 $f'(x)\leqslant 0$ 在区间 $(-1,3)$ 上恒成立，只需 $\begin{cases}f'(3)\leqslant 0,\\ f'(-1)\leqslant 0,\end{cases}$ 即

$$\begin{cases}27-t^2-6t\leqslant 0,\\ 3-t^2+2t\leqslant 0,\end{cases}$$

解得 $t\leqslant -9$ 或 $t\geqslant 3$.

注　本题是三次函数含参数的单调性问题. 三次函数求导可得二次函数. 若二次项系数为正的二次函数 $f'(x)$ 在区间 (a,b) 上小于等于零，只需区间端点满足 $f(a)\leqslant 0, f(b)\leqslant 0$ 同时成立.

(6)极值

例题 10　若函数 $f(x)=x^2-\frac{1}{2}\ln x+1$ 在其定义域内的一个子区间 $(a-1,a+1)$ 上存在极值，求实数 a 的取值范围.

解答　对 $f(x)$ 求导得

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(2x-1)}{2x}.$$

当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

故 $\frac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的极小值点. 若 $f(x)$ 在定义域内的一个子区间 $(a-1,a+1)$ 上存在极值，则有 $0\leqslant a-1<\frac{1}{2}<a+1$，解得

$$1\leqslant a<\frac{3}{2}.$$

(7)最值

例题 11 求函数 $y=x^4-2x^2+5$ 在区间$[-2,2]$上的最大值与最小值.

解答 **方法一**:记 $f(x)=x^4-2x^2+5$,则

$$f'(x)=4x(x+1)(x-1).$$

当$-2<x<-1$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;当$-1<x<0$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增;当 $0<x<1$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;当 $1<x<2$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.

其中 $f(-2)=f(2)=13$,$f(-1)=f(1)=4$,$f(0)=5$,则 $f(x)$的最大值为 13,最小值为 4.

方法二:记 $f(x)=x^4-2x^2+5$,则 $f(-x)=f(x)$,$f(x)$为偶函数,故只需要研究 $x\in[0,2]$的情况.对$f(x)$求导得

$$f'(x)=4x(x+1)(x-1).$$

当 $0<x<1$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;当 $1<x<2$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.

因为 $f(0)=5$,$f(1)=4$,$f(2)=13$,所以 $f(x)$的最大值为 13,最小值为 4.

方法三:令 $t=x^2$,则 $t\in[0,4]$,记 $g(t)=t^2-2t+5$.

当 $0<t<1$ 时,$g(t)$单调递减;当 $1<t<4$ 时,$g(t)$单调递增.

因为 $g(0)=5$,$g(1)=4$,$g(4)=13$,所以 $g(t)$的最大值为 13,最小值为 4.

注 方法一纵观整个定义域,直接利用导数研究原函数的单调性,为直接法.方法二对函数奇偶性的判断,减少了讨论的区间.本题较为容易,并未突出方法二的简捷.方法三避免了使用导数,而是通过换元法将四次函数的最值问题转化为二次函数的最值问题.

例题 12 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^3-3x,x\leqslant a,\\-2x,x>a.\end{cases}$

(1)若 $a=0$,求 $f(x)$的最大值.

(2)若 $f(x)$无最大值,求实数 a 的取值范围.

解答 (1)当 $a=0$ 时,

$$f(x)=\begin{cases}x^3-3x,x\leqslant 0,\\-2x,x>0.\end{cases}$$

当 $x>0$ 时,若$-2x<0$,则 $f(x)$无最大值.

当 $x\leqslant 0$ 时,令 $g(x)=x^3-3x$,则

$$g'(x)=3(x+1)(x-1).$$

当 $x<-1$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增;当$-1<x<0$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减.故

$$g(x)_{\max}=g(-1)=2.$$

综上:$f(x)$的最大值为 2.

(2)由(1)知,$g(x)$在区间$(-\infty,-1)$上单调递增,在区间$(-1,1)$上单调递减,在区间

$(1,+\infty)$上单调递增.

当 $a\geqslant 2$ 时，$g(-1)=g(2)=2,-2x<2$，此时

$$f(x)_{\max}=f(a),$$

$f(x)$存在最大值.

当 $-1\leqslant a<2$ 时，$g(x)_{\max}=g(-1)=2,-2x<2$，此时

$$f(x)_{\max}=f(-1),$$

$f(x)$存在最大值.

当 $a<-1$ 时，$g(x)_{\max}=g(a)=a^3-3a$，此时

$$a^3-3a-(-2a)=a(a+1)(a-1)<0,$$

$f(x)$不存在最大值.

综上：$a\in(-\infty,-1)$.

注　求 $g(x)=x^3-3x$ 在区间$(-\infty,0]$上的最大值，也可以利用三元均值不等式. 求最大值只需要关注 $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant 0$ 的情况，$g(x)=\sqrt{x^2(x^2-3)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2x^2(x^2-3)^2}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{2x^2+3-x^2+3-x^2}{3}\right)^3}=2$，当 $x=-1$ 时取等号. 利用三角函数也可以求 $g(x)=x^3-3x$ 在区间$(-\infty,0]$上的最大值. 当 $x<-2$ 时，$g(x)<0$，我们关注 $-2\leqslant x\leqslant 0$ 的情况. 令 $x=2\cos\alpha$，其中 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$，利用三倍角公式有 $x^3-3x=8\cos^3\alpha-6\cos\alpha=2\cos 3\alpha\leqslant 2$，当 $\alpha=\frac{2}{3}\pi$时取等号.

(8)不等式

例题 13　求曲线 $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$在 $x=0$ 处的切线方程.

解答　对 y 求导得

$$y'=\frac{2}{1-x^2},$$

则

$$y'|_{x=0}=2.$$

而$y|_{x=0}=0$，则曲线 $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$在 $x=0$ 处的切线方程为

$$y=2x.$$

注　本题是求切线方程问题，我们从原函数与切线方程的位置关系可以得出比较重要的不等式.

构造函数 $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}-2x(-1<x<1)$，则 $f'(x)=\frac{2x^2}{1-x^2}\geqslant 0$，$f(x)$单调递增，且 $f(0)$

$=0$. 当$-1<x<0$时，$f(x)<0$，即$\ln\dfrac{1+x}{1-x}<2x$；当$0<x<1$时，$f(x)>0$，即$\ln\dfrac{1+x}{1-x}>2x$.

令$t=\dfrac{1+x}{1-x}$，则$x=\dfrac{t-1}{t+1}$. 因此，当$0<t<1$时，$\ln t<\dfrac{2(t-1)}{t+1}$；当$t>1$时，$\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}$.

以这两个不等式为背景的高考试题有：

1.（2016年新课标卷Ⅱ(文)21）已知函数$f(x)=(x+1)\ln x-a(x-1)$.

(1)当$a=4$时，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程.

(2)若当$x\in(1,+\infty)$时，$f(x)>0$，求a的取值范围.

2.（2011年大纲卷(理)22）(1)设函数$f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{2x}{x+2}$，证明：当$x>0$时，$f(x)>0$.

(2)从编号1到100的100张卡片中每次随机抽取1张，然后放回，用这种方式连续抽取20次. 设抽得的20个号码互不相同的概率为p，证明：$p<\left(\dfrac{9}{10}\right)^{19}<\dfrac{1}{e^2}$.

3.（2014年大纲卷(理)22）函数$f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{ax}{x+a}(a>1)$.

(1)讨论$f(x)$的单调性.

(2)设$a_1=1$，$a_{n+1}=\ln(a_n+1)$，证明：$\dfrac{2}{n+2}<a_n\leqslant\dfrac{3}{n+2}$.

令$t=\dfrac{b}{a}$，且$b>a$，则由$\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$知$\ln\dfrac{b}{a}>\dfrac{2\left(\dfrac{b}{a}-1\right)}{\dfrac{b}{a}+1}$，整理有

$$\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}.$$

这便是对数-算术平均值不等式. 令$t=e^x$，且$x>0$，则由$\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$知$\ln e^x>\dfrac{2(e^x-1)}{e^x+1}$，整理有

$$(x-2)e^x+x+2>0.$$

以此不等式为背景的高考试题有：

（2016年新课标卷Ⅱ(理)21）(1)讨论函数$f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}e^x$的单调性，并证明：当$x>0$时，$(x-2)e^x+x+2>0$.

(2)证明：当$a\in[0,1)$时，函数$g(x)=\dfrac{e^x-ax-a}{x^2}(x>0)$有最小值. 设$g(x)$的最小值为$h(a)$，求函数$h(a)$的值域.

将$\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}$中的$a$替换为$e^x$，$b$替换为$e^y$，则有

$$\frac{e^x-e^y}{x-y}<\frac{e^x+e^y}{2}.$$

这便是**对数-算术平均值不等式的指数形式**. 以此不等式为背景的高考试题有：

1.（2013年陕西卷(理)21）已知函数$f(x)=e^x$，$x\in\mathbf{R}$.

(1)若直线$y=kx+1$与$f(x)$的反函数的图象相切，求实数k的值.

(2)设$x>0$，讨论曲线$y=f(x)$与曲线$y=mx^2(m>0)$公共点的个数.

(3)设$a<b$，比较$\frac{f(a)+f(b)}{2}$和$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$的大小，并说明理由.

2.（2013年陕西卷(文)21）已知函数$f(x)=e^x$，$x\in\mathbf{R}$.

(1)求$f(x)$的反函数的图象上点(1,0)处的切线方程.

(2)证明：曲线$y=f(x)$与曲线$y=\frac{1}{2}x^2+x+1$有唯一公共点.

(3)设$a<b$，比较$\frac{f(a)+f(b)}{2}$和$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$的大小，并说明理由.

3.（2010年天津卷(理)21）已知函数$f(x)=xe^{-x}(x\in\mathbf{R})$.

(1)求函数$f(x)$的单调区间与极值.

(2)已知函数$y=g(x)$的图象与函数$y=f(x)$的图象关于直线$x=1$对称，证明：当$x>1$时，$f(x)>g(x)$.

(3)如果$x_1\neq x_2$，且$f(x_1)=f(x_2)$，证明：$x_1+x_2>2$.

有对数-算数平均值不等式，那么是否有对数-几何平均值不等式呢？答案是肯定的. **对数-几何平均值不等式**为$\frac{a-b}{\ln a-\ln b}>\sqrt{ab}$. 不妨设$x=\frac{b}{a}$，且$b>a$，则有不等式

$$\ln x<\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}};$$

设$x=\sqrt{\frac{b}{a}}$，且$b>a$，则有不等式

$$\ln x<\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right).$$

以$\ln x<\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)(x>1)$为背景的高考试题有：

1.（2011年课标全国卷(理)21）已知函数$f(x)=\frac{a\ln x}{x+1}+\frac{b}{x}$，曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$x+2y-3=0$.

(1)求a，b的值.