浙大数学优辅

本书荣获高效能品牌图书TOP榜“专题专项类”金奖

配视频讲解

高中数学新体系（修订版）

圆锥曲线的秘密

苏立标（特级教师）编著

博观而约取，厚积而薄发 ——圆锥曲线可以这样得来

举目仰望星空，回首又见炊烟 ——圆锥曲线可以这样运算

落霞与孤鹜齐飞，秋水共长天一色 ——圆锥曲线可以这样考查

兵马未动，粮草先行 ——圆锥曲线可以这样梳理

撑一支长篙，向更青处漫溯 ——圆锥曲线可以这样研究

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

无问西东，只为追寻圆锥曲线的秘密

圆锥曲线是解析几何的重要组成部分，是解析几何核心内容的体现. 圆锥曲线又称圆锥截痕、圆锥截面、二次曲线，是通过平切圆锥（严格地讲，是一个正圆锥面和一个平面完整相切）得到的曲线，这揭示了圆锥曲线与圆锥之间的渊源. 圆锥曲线约在公元前 200 年就已被命名和研究了，其发现者为古希腊的数学家阿波罗尼斯（前 262—前 190 年），那时阿波罗尼斯对圆锥曲线的性质已做了一些系统性研究，现在再回首，圆锥曲线的魅力依然如故，真可谓是曲线风光，分外妖娆，千年传承，万年续表.

圆锥曲线之美，美不胜收. 圆锥曲线的美无与伦比，它不仅在图形上有令人入迷的对称美、和谐美和奇异美，而且在性质上有统一美（统一的定义、统一的极坐标方程、统一的性质等），让人叹为观止. 圆锥曲线的统一美表现在一个量变引起质变的过程，即圆锥曲线的离心率的量变引起了曲线类型的质变.

当曲线的离心率 e 由 0 逐渐接近 1 时，曲线所表示的椭圆逐渐变得扁平，这是一个量变的积累过程；

当 $e=1$ 时，就发生了质变，它不再是椭圆了，而“脱胎”为一条抛物线；

当 $e>1$ 时，曲线再次发生了质变，“羽化”为双曲线了，接着又是一个量变的过程，随着 e 趋向于无穷大，曲线则“蜕化”为两条相交直线（双曲线的两条渐近线）.

这说明圆锥曲线的离心率在数值上的量变引起了曲线由椭圆到抛物线、双曲线、两条相交直线的质变. 还有其结构上别具一格的美，让人耳目一新. 圆锥曲线的内容丰富多彩，既有大江

大河奔腾之雄壮，又有涓涓溪流流淌之幽雅. 圆锥曲线的美还在于其出神入化的广泛应用. 我们的生活中到处都有圆锥曲线的“起舞弄清影”，例如我们随便拿一个盛着半杯水的杯子（圆柱体），若把水杯平放，则水面是一个圆面，若把水杯倾斜一个角度，则水面变为一个椭圆面. 放眼于璀璨的星空，行星的运行轨道大多是椭圆、双曲线或抛物线等，我们不得不发出这样的感慨：圆锥曲线的应用可以是“近在嘴边，远在天边”. 另外，圆锥曲线的美还在于简洁明快的公式、绚丽多姿的符号、奇特深奥的问题等.

圆锥曲线如此多娇，引无数铁粉竞折腰. 在圆锥曲线性质这个大花园中可以说是繁花似锦，景色宜人，还有很多非常有趣的美妙性质、很多秘密等待着大家去发现、去揭示、去欣赏，但是从一个高中数学教师的视角又会看到什么样的圆锥曲线？发现圆锥曲线什么样的秘密呢？本书试图从一个中学师生所关心的圆锥曲线问题展开探讨，全方位透视、欣赏圆锥曲线的美丽传说，触摸圆锥曲线的灵魂.

第一章讲述了圆锥曲线的定义：全方位多角度剖析——横看成岭侧成峰，远近高低各不同；

第二章讲述了圆锥曲线的解题方法：简化运算的策略梳理——八仙过海，各显神通；

第三章讲述了圆锥曲线的命题情结：深深眷恋的情结罗列——昨夜西风凋碧树，独上高楼，望尽天涯路；

第四章讲述了圆锥曲线的知识清单：知识点的回眸与知识网络的构建——胸有成竹，温故而知新；

第五章讲述了圆锥曲线的性质：探究以及研究的感受——众里寻他千百度，蓦然回首，那人却在灯火阑珊处.

在本书中，第四章与第五章是基础与提升的关系，第四章是知识的沉淀与储备篇，是作为知识清单而出现的，重在进行知识呈现，是知识的概述过程，是“基本盘”；而第五章是提升篇，对问题进行深化与拓展，讲究的是如何来研究圆锥曲线，探究圆锥曲线的性质，是深度学习，是“压舱石”. 所以第一章从“面”上布局，第五章则从“点”上深入，第一章知识的生长点是第五章

问题探究的出发点，因此这两章是相辅相成、相得益彰. 如果说在第一章看到的是“万家灯火，百花齐放”，那么第五章即将看到的是“星星之火，可以燎原”.

本次修订重在知识的完善与方法的提升，增加计算的方法技巧总结与提炼，尽可能多角度地考虑问题，使解题方法更接地气. 例如，对偶式的构造、反演法、硬解定理等. 对于学习中的痛点、难点、重点问题进行剖析，例如，出现结构不对称问题的处理策略、设点设线设曲线的选择、如何用曲线方程法等问题.

当你阅读本书时，你将会与作者一起，行走在曲线与方程之间，徜徉在数与形的完美结合中，共同领略圆锥曲线独特的内在美和探索圆锥曲线更多的秘密，所以本书成册的初衷是要做一个圆锥曲线的触类旁通的智慧向导，等着你来！

基于“三新”的教学实践使得本书得到不断充实更新，更加贴近于新高考学习的需求. 为满足更多读者需求，作者录制了部分视频讲座，可在 B 站搜“圆锥曲线的秘密”观看. 欢迎加入“高中数学新体系”图书交流 QQ 群（群号码：821526438），就书中内容进行研讨！

苏立标（特级教师）

目录 Contents

第一章 博观而约取，厚积而薄发

圆锥曲线可以这样得来 …… 1

1.1 圆锥曲线可以“转”出来 …… 2

1.1.1 当圆锥曲线的定义遇到高考时 …… 9

1.1.2 当圆锥曲线的定义遇到向量时 …… 16

1.2 圆锥曲线可以“折”出来 …… 18

1.3 圆锥曲线可以“切”出来 …… 19

思考题 …… 26

第二章 举目仰望星空，回首又见炊烟

圆锥曲线可以这样运算 …… 29

2.1 方法概论，提纲挈领 …… 31

2.2 设而不求，妙在其中 …… 40

2.2.1 基本转化法 …… 41

2.2.2 整体消元法 …… 44

2.2.3 同构转化法 …… 52

2.2.4 齐次处理法 …… 57

2.2.5 曲线方程法 …… 61

2.3 降维转化，别有洞天 …… 64

2.4 定义搭台、几何唱戏 …… 68

2.5 向量当道，出奇制胜 …… 73

2.6 以静制动，突出重围 …… 84

2.7 硬解定理，刚柔并济 …… 89

思考题 …… 93

目录

Contents

第三章 落霞与孤鹜齐飞,秋水共长天一色

圆锥曲线可以这样考查 …… 95

3.1 离心率问题 …… 96

3.2 共焦点问题 …… 102

3.3 定比问题 …… 106

3.4 e^2-1 问题 …… 110

3.4.1 与圆锥曲线的对称中心有关的 e^2-1 性质 …… 110

3.4.2 与圆锥曲线的中点弦有关的 e^2-1 性质 …… 116

3.4.3 与圆锥曲线的切线有关的 e^2-1 性质 …… 125

3.4.4 e^2-1 性质的本质与适用范围 …… 127

3.5 双斜率问题 …… 131

3.5.1 斜率的积为定值的问题 …… 131

3.5.2 斜率的商为定值的问题 …… 139

3.5.3 斜率的和为定值的问题 …… 142

3.5.4 斜率的倒数和为定值的问题 …… 149

思考题 …… 154

第四章 兵马未动,粮草先行

圆锥曲线可以这样梳理 …… 156

4.1 圆锥曲线问题中的特殊直线 …… 157

4.1.1 切线问题 …… 157

4.1.2 切点弦问题 …… 161

4.1.3 倾斜角互补的弦问题 …… 163

4.1.4 相互垂直的弦问题 …… 164

4.1.5 双曲线的渐近线问题 …… 165

目录 Contents

4.2 圆锥曲线问题中的特殊三角形 …… 168
4.2.1 焦点三角形 …… 169
4.2.2 共焦点三角形 …… 176
4.2.3 阿基米德三角形 …… 176
4.3 圆锥曲线问题中的特征直角梯形 …… 178
4.3.1 垂直问题 …… 178
4.3.2 定值问题 …… 179
4.3.3 共线、共点问题 …… 181
4.3.4 圆的问题 …… 181
4.3.5 面积问题 …… 182
4.3.6 平分线问题 …… 183
4.3.7 其他问题 …… 184
4.4 圆锥曲线中的“蒙日圆”问题 …… 185
思考题 …… 190
第五章 撑一支长篙，向更青处漫溯
圆锥曲线可以这样研究 …… 193
5.1 圆锥曲线研究案例综述 …… 195
5.1.1 问题的背景提出——乱花渐欲迷人眼 …… 195
5.1.2 问题的本原探究——吹尽狂沙始到金 …… 196
5.1.3 问题的变式探究——淡妆浓抹总相宜 …… 196
5.1.4 问题探究的反思——映日荷花别样红 …… 201
5.2 圆锥曲线中的定值问题探究 …… 202
5.2.1 一类圆锥曲线中平行弦的定值问题探究 …… 202
5.2.2 一类与准线相关的定值问题溯源 …… 207
5.2.3 一类以 e^2-1 为背景的定值问题溯源 …… 211
5.2.4 一类与定值 $\frac{2}{e}$ 有关的问题溯源 …… 215

目录 Contents

5.3 圆锥曲线中的定点问题探究 …… 220

5.3.1 高考试题中圆锥曲线“伴侣点”的透视与剖析 …… 220

5.3.2 圆锥曲线中以张角为直角的弦为背景的定点问题概述 …… 224

5.4 圆锥曲线中的定直线问题探究 …… 228

5.4.1 一类圆锥曲线的法线问题探究 …… 228

5.4.2 一类圆锥曲线的类准线问题初探 …… 231

5.4.3 一类以极线为背景的定直线问题初探 …… 235

5.5 以圆为背景的圆锥曲线性质探究 …… 238

5.5.1 双曲线的伴随圆的性质初探 …… 238

5.5.2 以蒙日圆的姊妹圆为背景的溯源探究 …… 241

5.5.3 椭圆的同心内切圆的性质管窥 …… 245

5.6 圆锥曲线中的其他问题探究 …… 249

5.6.1 抛物线中的类特征直角梯形的性质探秘 …… 249

5.6.2 椭圆的顶焦点三角形的性质探究 …… 253

5.6.3 圆锥曲线的相似曲线的性质探究 …… 257

5.6.4 圆锥曲线的伴随曲线的性质探讨 …… 262

5.6.5 以椭圆的切线为背景的高考试题剖析 …… 267

5.6.6 尽显“几何本色”的圆锥曲线问题 …… 272

思考题 …… 282

思考题解答 …… 286

后记——采菊东篱下，悠然见南山 …… 304

扫码观看视频讲解

第一章

博观而约取，厚积而薄发

——圆锥曲线可以这样得来

合理地组织知识，使知识处于随时可用的状态，要比储备知识更为重要.——波利亚

在学习圆锥曲线时，我们首先要做的事情就是要弄明白圆锥曲线的来龙去脉，揭示圆锥曲线的前世今生.要学会从不同的角度来欣赏、理解其本质，梳理知识的网络，使知识处于一种鲜活的、系统的状态，随时可以摄取.

正如美国著名教育家、心理学家布鲁纳所指出："知识如果没有完满的结构把它连接在一起，那是一种多半会被遗忘的知识."的确，我们在每节课里获得的知识是"散装"的，常有"见叶不见枝，见木不见林"的片面感.所以，为了能够整体地系统地感知知识，形成完整的认知结构，我们需要站在系统的高度对知识进行梳理，构建知识链，完善认知网络，并逐步学会整体建构的方法，形成整体建构的思想.

1.1 圆锥曲线可以“转”出来

圆锥曲线可以看作是动点绕着定点或定直线转动所形成的图形，从而得到圆锥曲线的定义，这是一种直观且形象的操作，也是我们认识圆锥曲线的直观开始. 圆锥曲线的定义是研究圆锥曲线性质的重要支撑，也是我们学习圆锥曲线的重要方法.

圆锥曲线的第一定义

椭　圆　平面内与两个定点 F_1,F_2 的距离的和等于常数(大于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹.

双曲线　平面内与两个定点 F_1,F_2 的距离的差的绝对值等于常数（大于 0 且小于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹.

抛物线　平面内与一个定点 F 和一条定直线 $l(F\notin l)$ 的距离相等的点的轨迹.

圆锥曲线的统一定义

圆锥曲线　平面内到一个定点 F 的距离和到一条定直线 l 的距离之比是一个常数 e 的点 P 的轨迹.

当 $0<e<1$ 时，点 P 的轨迹为椭圆；

当 $e>1$ 时，点 P 的轨迹为双曲线；

当 $e=1$ 时，点 P 的轨迹为抛物线.

例 1　设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的右焦点为 F，动点 P 在椭圆 C 上，点 A 是直线 $l:3x-4y-12=0$ 上的动点，则 $|PA|-|PF|$ 的最小值是_____.

解答　如图 1.1-1，设椭圆的左焦点为 F'，由题意知

$$F'(-1,0),F(1,0).$$

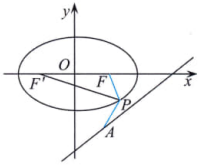


图 1.1-1

由椭圆的定义知

$$|PF'|+|PF|=4,$$

从而

$$|PA|-|PF|=|PA|-(4-|PF'|)=|PA|+|PF'|-4.$$

要求 $|PA|-|PF|$ 的最小值，即求 $|PA|+|PF'|$ 的最小值，即所求的最小值为点 F' 到直线 l 的距离，即

$$d_{F'\to l}=\frac{|-3-0-12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3,$$

所以

$$(|PA|-|PF|)_{\min}=-1.$$

点评　在这个题目中，椭圆定义的功能就在于把点 P 到右焦点的距离置换成点 P 到左焦点的距离，从而使问题的解答得以顺利完成.

例 2　已知 P 是抛物线 $y^2=4x$ 上的一点，过点 P 作直线 $x=-2$ 的垂线，垂足为 H，直线 l 经过原点，由 l 上的一点 Q 向圆 $C:(x+5)^2+(y-3)^2=2$ 作两条切线，分别切圆 C 于 M，N 两点，且 $\triangle MQN$ 为直角三角形，则 $|PQ|+|PH|$ 的最小值是_____.

解答　如图 1.1-2，设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 $F(1,0)$、准线方程为 $x=-1$. 由抛物线的定义知

$$|PH|=|PF|+1,$$

故

$$|PQ|+|PH|=|PQ|+|PF|+1\geqslant|QF|+1.$$

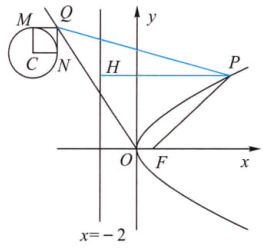


图 1.1-2

易知四边形 $CMQN$ 为正方形，设圆 C 的半径为 r，则

$$|CQ|=\sqrt{2}r=2.$$

因此，点 Q 在以 $C(-5,3)$ 为圆心、$r'=2$ 为半径的圆上，故

$$|QF|\geqslant|CF|-r'=3\sqrt{5}-2,$$

所以

$$|PQ|+|PH|\geqslant|QF|+1\geqslant3\sqrt{5}-2+1=3\sqrt{5}-1.$$

点评　在这个题目中，寻找问题的解答突破口利用了抛物线的定义，把点 P 到焦点的距离置换成点 P 到准线的距离.

例 3　已知三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$，$AA_1\perp$ 平面 ABC，P 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 内一点，点 E，F 在直线 BC 上运动，若直线 PA 和 AE 所成角的最小值与直线 PF 和平面 ABC 所成角的最大值相等，则满足条件的点 P 的轨迹是(　　).

A. 直线的一部分

B. 圆的一部分

C. 抛物线的一部分

D. 椭圆的一部分

解答　如图 1.1-3，设点 P 在平面 ABC 上的射影为 O，由最小角定理知，直线 PA 和 AE 所成角的最小值等于直线 PA 和平面 ABC 所成的角 α，则

$$\tan\alpha=\frac{PO}{OA}.$$

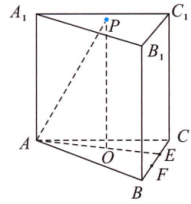


图 1.1-3

另外，直线 PF 和平面 ABC 所成角的最大值等于二面角 $P\text{-}BC\text{-}A$ 的大小，过点 O 作 $OH\perp BC$，垂足为 H，则 $\angle OHP$ 为二面角 $P\text{-}BC\text{-}A$ 的平面角，且

$$\tan\angle OHP=\frac{PO}{OH}.$$

由题意知 $\alpha=\angle OHP$，即

$$\tan\alpha=\tan\angle OHP,$$

所以

$$OH=OA.$$

点 P 到点 A_1 的距离等于点 P 到 B_1C_1 的距离，所以点 P 的轨迹是以 A_1 为焦点、B_1C_1 为准线的抛物线的一部分.

故选 C.

引申 在四面体 $ABCD$ 中，AD 与 BC 互相垂直，$AD=2BC=4$，且 $AB+BD=AC+CD=2\sqrt{14}$，则四面体 $ABCD$ 的体积的最大值是(　　).

A. 4　　B. $2\sqrt{10}$　　C. 5　　D. $\sqrt{30}$

解答 已知 $AB+BD=AC+CD=2\sqrt{14}$，由椭圆定义知点 B,C 都在以 A,D 为焦点的椭圆上，且长轴 $2a=2\sqrt{14}$.

如图 1.1-4，过点 B 作 BE 垂直 AD 于点 E，连接 CE，则 $AD\perp$ 平面 BCE，所以

$$CE\perp AD,|BE|=|CE|,|BE|_{\max}=b,$$

b 为椭圆的短半轴. 设 BC 的中点为 F，则

$$|EF|=\sqrt{BE^2-BF^2}=\sqrt{BE^2-1},|EF|_{\max}=3,V_{\max}=\frac{1}{3}AD\cdot S_{\triangle BCE}=4.$$

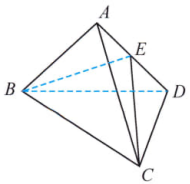


图 1.1-4

故选 A.

点评 从平面到空间对圆锥曲线的定义进行深度学习，理解其丰富的内涵，这是学习所必须经历的重要过程. 圆锥曲线的定义体现了圆锥曲线的本质属性，定义是圆锥曲线中最活跃的元素，运用圆锥曲线的定义解题是一种最直接、最本质的方法，在解题方面往往能助我们一臂之力，常常能收到立竿见影之效. 正如波利亚所说："当你不能解决一个问题时，不妨回到定义."

从四则运算的角度来说，椭圆与双曲线的第一定义只涉及和与差的运算，如果是积与商为定值的点的轨迹又会怎么样呢？

知识储备

1. 到两定点的距离之商为定值(不等于 1)的点的轨迹是阿波罗尼斯圆；
2. 到两定点的距离之和为定值(大于两定点的距离)的点的轨迹是椭圆；
3. 到两定点的距离之差的绝对值为定值(大于 0 且小于两定点的距离)的点的轨迹是双曲线；
4. 到两定点的距离之积为定值(该定值为正数)的点的轨迹是卡西尼卵形线.

例 4 阿波罗尼斯是古希腊著名数学家，与欧几里得、阿基米德一起被称为亚历山大时期数学三巨匠，他对圆锥曲线有深刻而系统的研究，主要研究成果集中在他的代表作《圆锥曲线》

一书中. 阿波罗尼斯圆是他的研究成果之一，指的是已知动点 M 与两定点 A，B 的距离之比为 $\lambda(\lambda>0,\lambda\neq1)$，那么点 M 的轨迹就是阿波罗尼斯圆. 下面我们来研究与它相关的一个问题，已知圆 $x^2+y^2=1$ 和点 $A\left(-\frac{1}{2},0\right)$，点 $B(1,1)$，M 为圆 O 上的动点，则 $2|MA|+|MB|$ 的最小值为(　　).

A. $\sqrt{6}$　　B. $\sqrt{7}$　　C. $\sqrt{10}$　　D. $\sqrt{11}$

解答　设 $2|MA|=|MC|$，点 C 的坐标为 (m,n)，点 M 的坐标为 (x,y)，则

$$\frac{|MA|}{|MC|}=\frac{1}{2},$$

即

$$\frac{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2}}{\sqrt{(x-m)^2+(y-n)^2}}=\frac{1}{2},$$

整理得

$$x^2+y^2+\frac{2m+4}{3}x+\frac{2n}{3}y=\frac{m^2+n^2-1}{3}.$$

由题意得该圆的方程为

$$x^2+y^2=1,$$

所以

$$\begin{cases}2m+4=0,\\2n=0,\\\dfrac{m^2+n^2-1}{3}=1,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}m=-2,\\n=0.\end{cases}$$

所以点 C 的坐标为 $(-2,0)$，故

$$2|MA|+|MB|=|MC|+|MB|\geqslant|BC|=\sqrt{10}.$$

故选 C.

引申　在四面体 $ABCD$ 中，已知 $AD\perp BC$，$AD=6$，$BC=2$，且满足 $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}=2$，则 $V_{四面体ABCD}$ 的最大值为(　　).

A. 6　　B. $2\sqrt{11}$　　C. $2\sqrt{15}$　　D. 8

解答　过点 B 作 BE 垂直 AD 于点 E. 因为 $AD\perp BC$，所以 $AD\perp$ 平面 BCE. 因此

$$V=\frac{1}{3}AD\cdot S_{\triangle BCE}=2S_{\triangle BCE}.$$

又因为$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}=2$，所以点 B,C 在阿波罗尼斯圆上，所以

$$|BE|=|CE|,$$

得$|BE|_{max}=$圆的半径 $r=4$，从而

$$V_{max}=2\sqrt{15}.$$

故选 C.

不仅这个超级名圆——阿波罗尼斯圆的应用非常广泛，而且飘在圆锥曲线间的那一抹卡西尼卵形线在试题中也是频频出现，同样非常精彩，值得我们关注.

例 5 曲线 C 是平面内与两个定点 $F_1(-1,0)$ 和 $F_2(1,0)$ 的距离的积等于常数 $a^2(a>1)$ 的点的轨迹. 给出下列三个结论：

①曲线 C 过坐标原点；②曲线 C 关于坐标原点对称；③若点 P 在曲线 C 上，则$\triangle F_1PF_2$ 的面积不大于$\frac{1}{2}a^2$.

其中，所有正确结论的序号是_____.

解答 设曲线 C 方程为$\sqrt{(x+1)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}=a^2$.

①令 $x=y=0$，得 $a=1$，与已知矛盾，所以该结论不正确.

②把方程$\sqrt{(x+1)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}=a^2$ 中的 x 用 $-x$ 代换，同时把 y 用 $-y$ 代换，原方程不变，故此曲线关于原点对称，因此该结论正确.

③因为 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\angle F_1PF_2\leqslant\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|=\frac{1}{2}a^2$，所以该结论正确.

故正确结论的序号是②③.

例 6 已知实数 x,y 满足$\sqrt{(x+1)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}=4$，则 x^2+y^2 的取值范围是_____.

解答 **方法一**：由基本不等式得

$$4=\sqrt{(x+1)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}\leqslant\frac{(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2}{2}=x^2+y^2+1,$$

所以

$$x^2+y^2\geqslant 3.$$

由柯西不等式得

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}\geqslant(x+1)(x-1)+y\cdot y=x^2+y^2-1,$$

即

$$x^2+y^2\leqslant 5.$$

所以

$$x^2+y^2\in[3,5]$$

方法二：设点 $P(x,y)$，$F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，则有

$$|PF_1||PF_2|=4.$$

设 $r^2=x^2+y^2$，则由平行四边形的性质得

$$2(|PF_1|^2+|PF_2|^2)=(2|OP|)^2+|F_1F_2|^2,$$

即

$$|PF_1|^2+|PF_2|^2=2r^2+2.$$

由基本不等式得 $2r^2+2\geqslant 2|PF_1||PF_2|=8$，所以

$$r^2\geqslant 3.$$

另外，因为

$$||PF_1|-|PF_2||\leqslant|F_1F_2|=2,$$

平方得

$$|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\leqslant 4,$$

即 $2r^2+2-8\leqslant 4$，所以 $r^2\leqslant 5$，即

$$3\leqslant r^2\leqslant 5.$$

所以

$$x^2+y^2\in[3,5].$$

点评　例 5 和例 6 虽然都是以卡西尼卵形线为背景进行命题的，考查卡西尼卵形线的重要性质、特征，但用到的解题方法、技巧却是我们最熟悉和朴素的知识、方法，这也是我们高考命题者一贯所追求的：利用最朴素的材料，采取最一般的方法，得出最简单的结论.

学习者从自身的认知结构出发，运用类比思维学习数学，将更有助于建构适配自身的知识体系. 以圆锥曲线的第二定义为例，若将定义中“比为常数”的条件改为“积为常数”，则可衍生出如下问题：

引申　$\bigcirc$可以看作图 1.1-5 中曲线 C 的一部分，已知曲线 C 过坐标原点 O，且曲线 C 上的点满足横坐标大于 -1，到点 $F(1,0)$ 的距离与到定直线 $x=a(a<0)$ 的距离之积为 1.

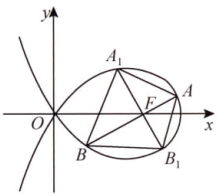


图 1.1-5

（Ⅰ）当点 (x_0,y_0) 在曲线 C 上时，证明：$y_0\geqslant-\dfrac{1}{x_0+1}$.

（Ⅱ）如图 1.1-5，过点 F 作两条互相垂直的弦，分别交曲线 C 于点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 和点 $A_1(x_3,y_3)$，$B_1(x_4,y_4)$，其中 $x_i\geqslant 0(i=1,2,3,4)$，求四边形 AA_1BB_1 面积的最小值.

证明　（Ⅰ）因为原点 O 在曲线上，所以点 O 到直线 $x=a$ 的距离为 $-a$.

又 $|OF|=1$，所以 $-a\times 1=1$，即 $a=-1$.

方法一：因为 $a=-1$，所以曲线 C 的方程为

$$|x+1|\sqrt{(x-1)^2+y^2}=1,$$

可化为$(x-1)^2+y^2=\left(\frac{1}{x+1}\right)^2$，即

$$y^2=\left(\frac{1}{x+1}\right)^2-(x-1)^2.$$

因此

$$y_0^2=\left(\frac{1}{x_0+1}\right)^2-(x_0-1)^2\leqslant\left(\frac{1}{x_0+1}\right)^2\Rightarrow\frac{-1}{x_0+1}\leqslant y_0\leqslant\frac{1}{x_0+1},$$

所以$y_0\geqslant\frac{-1}{x_0+1}$，当且仅当$x_0=1$且$y_0=-\frac{1}{2}$时，等号成立.

方法二：同上，曲线C的方程为$|x+1|\sqrt{(x-1)^2+y^2}=1$，因此

$$\frac{1}{x_0+1}=\sqrt{(x_0-1)^2+y_0^2}\geqslant\sqrt{y_0^2}\geqslant-y_0,$$

所以$y_0\geqslant\frac{-1}{x_0+1}$，当且仅当$x_0=1$且$y_0=-\frac{1}{2}$时，等号成立.

（Ⅱ）由$|x+1|\sqrt{(x-1)^2+y^2}=1$得$(x+1)^2[(x-1)^2+y^2]=1$.

当其中一条直线的斜率为0时，另一条直线的斜率不存在，此时

$$S_{四边形AA_1BB_1}=\frac{1}{2}|AB||A_1B_1|=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

当两条直线的斜率均存在且不为0时，设直线AB的斜率为k，倾斜角为θ，由对称性，不妨设$k>0$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则直线$AB$的方程为$y=k(x-1)$，其中$k=\tan\theta$，直线$A_1B_1$的方程为$y=\frac{-1}{k}(x-1)$.

联立$\begin{cases}(x+1)^2[(x-1)^2+y^2]=1,\\ y=k(x-1),\end{cases}$得

$$(1+k^2)x^4-2(1+k^2)x^2+k^2=0.$$

所以$\begin{cases}x_1^2+x_2^2=2,\\ x_1^2x_2^2=\frac{k^2}{1+k^2},\end{cases}$则$x_1x_2=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\sin\theta.$

故$|x_1-x_2|=\sqrt{x_1^2+x_2^2-2x_1x_2}=\sqrt{2-2\sin\theta}$，所以

$$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}\sqrt{2-2\sin\theta}=\sqrt{\frac{2-2\sin\theta}{\cos^2\theta}}=\sqrt{\frac{2}{1+\sin\theta}}.$$

同理

$$|A_1B_1|=\sqrt{\frac{2}{1+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}}=\sqrt{\frac{2}{1+\cos\theta}}.$$

所以

$$S_{四边形AA_1BB_1}=\frac{1}{2}|AB||A_1B_1|=\frac{1}{\sqrt{1+\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta\cos\theta}}.$$

令 $y=1+\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta\cos\theta$，再令 $t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$.

因为 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $t\in(1,\sqrt{2}]$，$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta$，即 $\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$，所以 $y=\frac{t^2}{2}+t+\frac{1}{2}$在区间$(1,\sqrt{2}]$上单调递增.

当 $t=\sqrt{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{4}$时，$y_{\max}=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$，此时

$$S_{四边形AA_1BB_1}\geqslant\sqrt{\frac{2}{3+2\sqrt{2}}}=\sqrt{2(3-2\sqrt{2})}=2-\sqrt{2}.$$

综上所述，四边形 AA_1BB_1 面积的最小值为 $2-\sqrt{2}$.

1.1.1　当圆锥曲线的定义遇到高考时

以圆锥曲线的定义为背景的高考试题，重在考查学生对数学基本概念的深度理解，问题的设计往往短小精悍，内涵丰富，富有启发性，让人耳目一新. 所以，有人说高考对圆锥曲线定义的考查可能会迟到，但不会缺席，圆锥曲线定义与高考有着不解之缘.

例 7　设 F_1,F_2 是双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的两个焦点，O 为坐标原点，点 P 在双曲线C 上且 $|OP|=2$，则$\triangle PF_1F_2$ 的面积为(　　).

A. $\frac{7}{2}$　　B. 3　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 2

解答　如图 1.1-6，易得$|F_1F_2|=4$，所以

$$|OP|=\frac{1}{2}|F_1F_2|,$$

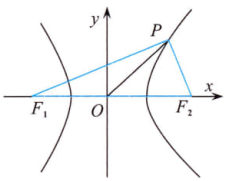


图 1.1-6

得到

$$\angle F_1PF_2=90^\circ,$$

因此$|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$，即

$$(|PF_1|-|PF_2|)^2+2|PF_1||PF_2|=|F_1F_2|^2.$$

由双曲线的定义得到$|PF_1|-|PF_2|=2$，则$|PF_1||PF_2|=6$，所以

$$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|=3.$$

故选 B.

点评　先将数量关系转化为几何特征，即$\angle F_1PF_2=90°$，再利用双曲线的定义，从整体上求出$|PF_1||PF_2|=6$，从而求出焦点三角形的面积，这样就回避了求点的坐标.

例 8　已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，过点 F_2 的直线与椭圆 C 交于 A，B 两点. 若$|AF_2|=2|F_2B|$，$|AB|=|BF_1|$，则椭圆 C 的方程为(　　).

A. $\frac{x^2}{2}+y^2=1$　　B. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　　C. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　D. $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

解答　如图 1.1-7，设$|F_2B|=t$，则$|AF_2|=2t$，所以$|BF_1|=3t$.

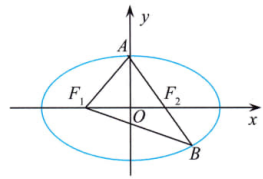


图 1.1-7

由椭圆的定义知

$$|BF_1|+|BF_2|=3t+t=2a,$$

即

$$t=\frac{1}{2}a.$$

由椭圆的定义知

$$|AF_1|=2a-|AF_2|=a,$$

所以点 A 在椭圆短轴的端点处. 在等腰三角形 ABF_1 中，

$$\cos\angle AF_1B=\frac{\frac{1}{2}|F_1A|}{|AB|}=\frac{1}{3}.$$

在等腰三角形 AF_1F_2 中，

$$|F_1F_2|^2=4=a^2+a^2-2a\cdot a\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{3}a^2,$$

得

$$a^2=3,b^2=a^2-c^2=2.$$

故选 B.

例 9　已知点 $M(-1,1)$和抛物线 $C:y^2=4x$，过抛物线 C 的焦点且斜率为 k 的直线与抛物线 C 交于 A，B 两点. 若$\angle AMB=90°$，则 $k=$_____.

解答　如图 1.1-8，易知点 $M(-1,1)$在抛物线的准线 $x=-1$ 上. 设 AB 的中点为 N，分别过点 A，B 作准线的垂线，垂足分别为 A_1，B_1. 由抛物线的定义知

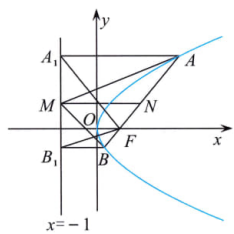


图 1.1-8

$$|AF|=|AA_1|,|BF|=|BB_1|.$$

因为$\angle AMB=90°$，所以

$$|MN|=\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}(|AF|+|BF|)=\frac{1}{2}(|AA_1|+|BB_1|),$$

故 MN 为梯形 AA_1B_1B 的中位线，即 M 为 A_1B_1 的中点. 由抛物线的定义易证

$$\angle A_1FB_1=90^\circ,$$

故

$$|MF|=\frac{1}{2}|A_1B_1|=|A_1M|.$$

因此 $\triangle MAA_1\cong\triangle AMF$，得 $\angle AFM=\angle MA_1A=90^\circ$，即

$$FM\perp AB.$$

从而

$$k=2.$$

点评　这是一道构思巧妙的高考试题，通俗中透出奇意，平淡中析出光芒. 在这个解答过程中，我们只用到抛物线的定义，再加上平面几何的一些常识就可以把问题搞定.

引申　过抛物线 $y^2=2x$ 的焦点 F 的直线与该抛物线交于 A,B 两点，过点 F 作线段 AB 的垂线，交抛物线的准线于点 G. 若 $|FG|=\frac{3}{2}$，O 为坐标原点，则 $S_{\triangle AOB}=$_____.

解答　设点 A,B 在准线上的射影分别为 A_1,B_1，则

$$\angle A_1FB_1=90^\circ.$$

由 $FG\perp AB$ 得 G 为 A_1B_1 的中点，所以 $|FG|=\frac{1}{2}|A_1B_1|=\frac{1}{2}|y_A-y_B|=\frac{3}{2}$，所以

$$|y_A-y_B|=3.$$

故

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OF||y_A-y_B|=\frac{3}{4}.$$

例 10　设圆 $x^2+y^2+2x-15=0$ 的圆心为 A，直线 l 过点 $B(1,0)$，且与 x 轴不重合，l 交圆 A 于 C,D 两点，过点 B 作 AC 的平行线，交 AD 于点 E. 证明：$|EA|+|EB|$ 为定值，并写出点 E 的轨迹方程.

证明　如图 1.1-9，由已知得

$$|AD|=|AC|,EB/\!/AC.$$

所以 $\angle EBD=\angle ACD=\angle ADC$，所以

$$|EB|=|ED|,$$

故

$$|EA|+|EB|=|EA|+|ED|=|AD|.$$

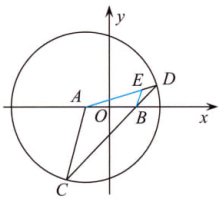


图 1.1-9

因为圆 A 的标准方程为

$$(x+1)^2+y^2=16,$$

从而 $|AD|=4$，所以

$$|EA|+|EB|=4>2=|AB|.$$

由椭圆定义可得点 E 的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(y\neq 0).$$

例 11 （2023 年高考甲卷）已知椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$，$F_1$，$F_2$ 为其两个焦点，O 为原点，P 为椭圆上一点，$\cos\angle F_1PF_2=\frac{3}{5}$，则 $|\overrightarrow{PO}|$ 等于（　　）.

A. $\frac{2}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{30}}{2}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{35}}{2}$

解答　**方法一**：在 $\triangle F_1PF_2$ 中，由余弦定理得 $|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos\angle F_1PF_2$，即

$$|F_1F_2|^2=(|PF_1|+|PF_2|)^2-2|PF_1||PF_2|(1+\cos\angle F_1PF_2).$$

由椭圆的定义得 $(2c)^2=(2a)^2-2|PF_1||PF_2|\left(1+\frac{3}{5}\right)$，所以 $|PF_1||PF_2|=\frac{15}{2}$，所以

$$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=|PF_1||PF_2|\cos\angle F_1PF_2=\frac{9}{2}.$$

而

$$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\left(\frac{\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\overrightarrow{PF_1}-\overrightarrow{PF_2}}{2}\right)^2=|\overrightarrow{PO}|^2-\left(\frac{\overrightarrow{F_1F_2}}{2}\right)^2=|\overrightarrow{PO}|^2-c^2=|\overrightarrow{PO}|^2-3,$$

所以 $|\overrightarrow{PO}|^2-3=\frac{9}{2}$，即 $|\overrightarrow{PO}|=\frac{\sqrt{30}}{2}$，故选 B.

方法二：在 $\triangle F_1PF_2$ 中，由余弦定理得 $|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos\angle F_1PF_2=|F_1F_2|^2$，即

$$|PF_1|^2+|PF_2|^2-\frac{6}{5}|PF_1||PF_2|=12.$$

由椭圆定义得 $|PF_1|+|PF_2|=2a=6$，平方得

$$|PF_1|^2+|PF_2|^2+2|PF_1||PF_2|=36.$$

以上两式消去 $|PF_1||PF_2|$，得 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=21$. 由平行四边形的性质可知

$$2(|PF_1|^2+|PF_2|^2)=(2|PO|)^2+(|F_1F_2|)^2=42,$$

解得 $|\overrightarrow{PO}|=\frac{\sqrt{30}}{2}$. 故选 B.

方法三：设 $\cos\angle F_1PF_2=\theta$，则 $\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1}{4}$，所以 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}$，从而

$$S_{\triangle F_1PF_2}=b^2\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}|F_1F_2||y_P|,$$

得 $|y_P|=\sqrt{3}$，所以 $x_P^2=\frac{9}{2}$，即 $|\overrightarrow{PO}|^2=x_P^2+y_P^2=\frac{15}{2}$，$|\overrightarrow{PO}|=\frac{\sqrt{30}}{2}$，故选 B.