本书荣获高效能品牌图书TOP榜“专题专项类”金奖

# 数列的秘密

高中数学新体系（修订版）

苏卫军 编著

适应新课标、新课程和新高考的**新变化**

**全面覆盖**数列的主干知识和重要方法

**由浅入深**、层层递进，指向问题的本质

知识、方法和例题进行了**有机融合**

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

# 序　言

数列是刻画离散现象的数学模型. 离散现象是自然界中普遍存在的现象，人们往往通过离散现象认识连续现象，这使得数列在数学中占有重要的地位. 数列是一种特殊函数，可以通过列表、图象、通项公式等来表示. 等差数列、等比数列与一次函数、指数函数紧密相关. 可以将数列与函数、方程、不等式相联系，从而进一步提升我们对函数思想的理解水平. 数列的内容具有丰富的现实背景，在实际问题中有着广泛的应用，日常生活中遇到的大量实际问题，如贷款、利率、折扣、人口增长、放射物的衰变等，都可以用等差数列或等比数列等模型来刻画.

数列是高中数学的重要内容，也是高等数学学习的必备基础. 无论是在高考还是在高校的三位一体、强基计划校测以及各级各类竞赛测试中，数列都有着举足轻重的地位，比如数列与数论相结合，数列构造与数列创新题等. 作为一本全面覆盖数列主干知识和重要方法的书，本书对以上这些知识和类型均有涉及和论述(总体难度基本上立足于高考或略高于高考). 此外，人教 A 版新教材在数列部分(选择性必修第二册)还大量增加了实际生活中的应用题篇幅，因此本书也专门开辟了一节内容来论述与数列有关的实际应用问题.

本书注重回归基础知识、基本概念和基本方法，每节内容的论述均采用由浅入深、层层推进并最终指向问题本质的方式来行文. 本书的题型和方法充分体现了新教材、新课标和新高考的变化，突出问题探究的背景. 全书的主干知识脉络清晰，重要方法讲解清楚，重要内容紧扣课标要求. 本书对知识、方法和例题进行了有机融合. 全书内容翔实，适合各层次的学生阅读. 本书也是教师备课的有益参考书.

纵观近几年全国卷对数列的考查情况，高考数学一方面聚焦数列本身的知识与方法，另一方面更侧重考查数列与其他主干知识的融合，即要求考生在综合背景与复杂情境下，运用数列相关知识解决问题. 可以预见，这一考查形式也将成为未来全国卷数列板块的核心命题趋势. 针对这一趋势，本次修订优化了前五章的内容，并新增一章“第六章　数列创新题与知识交汇题”. 本章着重剖析近年高考真题及优质模拟题，对数列与其他知识的交汇问题进行了细化梳理、深度剖析与拓展延伸.

全书分为六章，具体如下.

**第一章，数列的概念及性质**. 主要从数列研究方法的角度讲述了数列的表示方法、数列前 $n$ 项的和与通项的关系、数列中的差分以及数列的单调性和最值等问题.

**第二章，等差数列与等比数列**. 主要从等差数列和等比数列的角度讲述了这两类数列的判定方法、通项公式、求和公式和基本性质等问题，为数列的进一步研究打下坚实的基础.

**第三章，数列之求和与求通项**. 主要从数列的和与通项求解方法的角度讲述了数列求通项的几类方法（公式法、迭代法、构造法、不动点法和特征根法）以及数列求和的几类方法（公式法、错位相减法、分组法、并项法、倒序相加法和转化化归法）.

**第四章，数列之证明与不等式**. 主要呈现了数学归纳法、通项放缩法、函数不等式法等经典方法.

**第五章，数列应用题与综合题**. 主要从应用题和综合题的角度讲述了数列在实际生活中的应用、数列与简单的数论问题、数列与方程等相结合的问题以及数列中的新定义和新构造问题等.

**第六章，数列创新题与知识交汇题**. 着重分析最近几年的高考真题或高考模拟题，对数列与其他知识的交汇问题进行细化、加深及拓展.

在“三新”的教学实践下，本书内容得到不断充实、更新，更加贴近新高考学习的需求. 此书从构思到出版，虽然经过仔细校稿和反复修改，但不足之处在所难免. 欢迎读者朋友给予批评指正. 欢迎加入“高中数学新体系秘密系列”图书交流 QQ 群（群号码 821526438），就书中内容进行研讨！

苏卫军

目录

Contents


第一章 数列的概念及性质 …… 1

1.1 数列概念清，研究有方法 …… 1

1.1.1 数列的基本概念 …… 1

1.1.2 数列的前 $n$ 项和与通项的关系 …… 5

1.1.3 数列中的差分思想 …… 7

1.1.4 无穷数列中常见的极限问题 …… 10

1.2 数列性质多，最美单调性 …… 12

1.2.1 数列按变化规律分类 …… 12

1.2.2 数列单调性的定义 …… 12

1.2.3 判断数列的最大(小)项之作差法 …… 13

1.2.4 判断数列的最大(小)项之函数图象法与性质法 …… 15

1.2.5 判断数列的最大(小)项之导数法 …… 18

1.2.6 与数列单调性有关的概念问题 …… 18

1.2.7 与数列单调性有关的综合问题 …… 19

第二章 等差数列与等比数列 …… 25

2.1 数列之经典，等差来呈现 …… 25

2.1.1 等差数列的基本概念和基本公式 …… 25

2.1.2 等差数列的主要性质 …… 27

2.1.3 等差数列前 $n$ 项和的最值的求法 …… 31

2.1.4 等差数列的判定方法 …… 34

2.1.5 与等差数列有关的综合性问题 …… 37

2.2 数列之经典，等比来呈现 …… 43

2.2.1 等比数列的基本概念和基本公式 …… 43

目录 Contents

2.2.2 等比数列的主要性质 …… 47
2.2.3 等比数列的单调性和最值问题 …… 49
2.2.4 等比数列的判定方法 …… 51
2.2.5 错位相减求和问题 …… 53
2.2.6 等差数列与等比数列综合问题 …… 55
第三章 数列之求和与求通项 …… 59
3.1 数列之通项,迭代与构造 …… 59
3.1.1 公式法求数列通项 …… 59
3.1.2 迭代法求数列通项 …… 61
3.1.3 构造法求数列通项 …… 63
3.1.4 不动点法求数列通项 …… 68
3.1.5 特征根法求数列通项 …… 71
3.1.6 根据新定义求数列通项 …… 73
3.2 数列之通项,周期识全局 …… 76
3.2.1 周期数列的定义、性质和判定方法 …… 76
3.2.2 周期数列的主要表现形式 …… 77
3.3 数列之求和,错位与倒序 …… 83
3.3.1 公式法求和 …… 83
3.3.2 错位相减法求和 …… 84
3.3.3 分组法求和 …… 86
3.3.4 并项法求和 …… 87
3.3.5 倒序相加法求和 …… 88
3.3.6 转化化归法求和 …… 89
3.4 数列之求和,裂项速相消 …… 92
3.4.1 裂项相消法求和的主要形式 …… 92
3.4.2 裂项相消法求和的主要类型 …… 92

# 目录

Contents


第四章 数列之证明与不等式 …… 103

4.1 数列之证明，数学归纳法 …… 103

4.1.1 数学归纳法的主要步骤 …… 103

4.1.2 数学归纳法的主要类型 …… 104

4.2 数列不等式，通项放缩法 …… 114

4.2.1 通项放缩法的适用范围和主要类型 …… 114

4.3 数列不等式，函数放缩法 …… 124

4.4 数列之证明，正难则反法 …… 133

4.4.1 反证法的本质与步骤 …… 133

4.4.2 反证法的主要类型 …… 133

第五章 数列应用题与综合题 …… 143

5.1 数列应用题，经典好模型 …… 143

5.1.1 数列应用题在新教材以及新高考中的要求和考查方式 …… 143

5.1.2 数列应用题的常见类型和背景 …… 145

5.1.3 能转化为 $a_n = C \cdot a_{n-1} + B$ 结构的应用题(其中 $B$，$C$ 为非零常数且 $C \neq 1$) …… 149

5.1.4 数列与概率相结合的应用题 …… 154

5.2 数列综合题，探究有乐趣 …… 158

5.2.1 数列与简单的数论问题 …… 158

5.2.2 数列与绝对值、方程等问题 …… 159

5.2.3 数列与不等式的其他类型问题 …… 161

5.2.4 数列中的新定义和新构造问题 …… 166

第六章 数列创新题与知识交汇题 …… 174

6.1 数列与向量综合 …… 174

6.2 数列与排列组合(概率统计)综合 …… 177

6.3 数列与三角函数综合 …… 180

6.4 数列与解析几何综合 …… 183
6.5 数列与函数导数综合 …… 188
**思考题解答** …… 195

# 第一章

# 数列的概念及性质

## 1.1 数列概念清，研究有方法

### 1.1.1 数列的基本概念

(1)按确定顺序排列的一列数叫作**数列**.

(2)数列的项数可以是有限的(**有穷数列**)，也可以是无限的(**无穷数列**). 比如：1,3,5,7；或1,3,5,7,….

(3)数列的表示方法有很多，可用符号法表示为 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$[①]，通常简记为$\{a_n\}$，其中 $a_1$ 叫作数列的**首项**，$a_n$ 叫作数列的**通项**. 数列的本质是自变量属于正整数的一种特殊函数，所以数列最常见的表示方法是通项公式，也就是用函数法表示为 $a_n=f(n)$(其中定义域为正整数集或其子集$\{1,2,\cdots,n\}$)，比如：数列 $2,2^2,\cdots,2^n,\cdots$，也可写为数列$\{a_n\}$满足 $a_n=2^n$.

**例 1** 数列$\frac{2}{3},1,\frac{10}{7},\frac{17}{9},\frac{26}{11},\cdots$的一个通项公式为 $a_n=$_____.

分析 先根据数列的前几项找规律，再根据前几项的规律写出通项公式.

解答 数列的前五项可化为

$$\frac{1^2+1}{3},\frac{2^2+1}{5},\frac{3^2+1}{7},\frac{4^2+1}{9},\frac{5^2+1}{11}.$$

观察前五项的变化规律，可得数列的一个通项公式为

$$a_n=\frac{n^2+1}{2n+1}.$$

① 如无特殊说明，本书中的 $n$ 均属于正整数，即 $n\in\mathbf{N}^*$.

**例 2** 已知数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$满足$a_n=2n-1$,$b_n=3n-2$,把它们的公共项按从小到大的顺序排列,得到数列$\{c_n\}$,则$c_{2021}=$_____.

分析 公共项的前几项为 1,7,13,19,…,容易发现其仍然为等差数列,猜想公共项为等差数列,其首项为 1,公差为 6.

解答 一般地,考虑$2n-1=3m-2$,则

$$2(n-1)=3(m-1).$$

因此$n-1$必为 3 的倍数,所以$n-1=3(k-1)$,$n\in\mathbf{N}^*$,$k\in\mathbf{N}^*$,即

$$n=3k-2,$$

所以公共项构成的新数列为

$$c_k=2n-1=2(3k-2)-1=6k-5.$$

从而$c_{2021}=12121$.

评注 两个等差数列的公共项仍然构成等差数列.进一步,若两个等差数列的公差均为正整数,则其公共项组成的新数列的公差为两个等差数列公差的最小公倍数.

(4)数列也可以用图表法或图象法表示,还可以用递推法表示.

**一阶递推式**,如:在数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_{n+1}=2a_n+1$;

**二阶递推式**,如:在数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_2=3$,$a_{n+1}=a_n+2a_{n-1}(n\geqslant 2)$;

**分式递推式**,如:在数列$\{a_n\}$中,$a_1=2$,$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+1}$.

**例 3** 若数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$,$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+a_n}$,则$a_{2022}=$(　　).

A. $\dfrac{2}{4041}$　　B. $\dfrac{2}{4043}$　　C. $\dfrac{2}{2021}$　　D. $\dfrac{2}{2023}$

解答 **方法一**:计算前几项可得

$$a_1=\frac{2}{1},a_2=\frac{2}{3},a_3=\frac{2}{5},a_4=\frac{2}{7},\cdots,$$

猜想通项公式为

$$a_n=\frac{2}{2n-1}.$$

所以$a_{2022}=\dfrac{2}{4043}$,故选 B.

**方法二**:由$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+a_n}$可得

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+1.$$

故$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是等差数列,其首项为$\dfrac{1}{2}$,公差为 1,所以$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2}+(n-1)=\dfrac{2n-1}{2}$,即

$$a_n=\frac{2}{2n-1}.$$

所以 $a_{2022}=\frac{2}{4043}$，故选 B.

**变式**　若数列$\{a_n\}$满足 $a_1=2,a_{n+1}=\frac{1+a_n}{1-a_n}$，则 $a_{2023}=$(　　).

A. $-3$　　B. 3　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

解答　**方法一**：计算前几项，可得

$$a_1=2,a_2=-3,a_3=-\frac{1}{2},a_4=\frac{1}{3},a_5=2,\cdots,$$

所以数列$\{a_n\}$为周期数列，其周期为 4，所以

$$a_{2023}=a_3=-\frac{1}{2}.$$

故选 C.

**方法二**：由 $a_{n+1}=\frac{1+a_n}{1-a_n}$可得

$$a_{n+2}=-\frac{1}{a_n},$$

所以

$$a_{n+4}=a_n.$$

可知数列$\{a_n\}$为周期数列，其周期为 4，所以

$$a_{2023}=a_3=-\frac{1}{2}.$$

故选 C.

**方法三**：$a_{n+1}=\frac{1+a_n}{1-a_n}$可变形为

$$a_{n+1}=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+a_n}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot a_n}.$$

令 $a_n=\tan b_n$，则

$$\tan b_{n+1}=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan b_n}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan b_n}=\tan\left(b_n+\frac{\pi}{4}\right).$$

所以

$$\tan b_{n+4}=\tan(b_n+\pi)=\tan b_n,$$

即

$$a_{n+4}=a_n.$$

可知数列$\{a_n\}$为周期数列，其周期为4，所以

$$a_{2023}=a_3=-\frac{1}{2}.$$

故选C.

评注　已知数列的递推关系式，求通项公式，往往可以先猜后证（数学归纳法），或直接构造新数列进行求解.

**例4**　在数列$\{a_n\}$中，已知$S_n$是其前$n$项和，若$a_1=1$，$a_2=2$，$a_na_{n+1}a_{n+2}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$，且$a_{n+1}a_{n+2}\neq1$，则$a_1+a_2+a_3=$_____，$S_{2021}=$_____.

解答　**方法一**：计算前几项，可得

$$1,2,3,1,2,3,\cdots$$

发现其为周期数列，且周期$T=3$，所以

$$a_1+a_2+a_3=6,S_{2021}=4041.$$

**方法二**：在递推关系式$a_na_{n+1}a_{n+2}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$中，用$n+1$代替$n$，可得

$$a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3},$$

两式相减，可得$a_{n+1}a_{n+2}(a_{n+3}-a_n)=a_{n+3}-a_n$，即

$$(a_{n+3}-a_n)(a_{n+1}a_{n+2}-1)=0.$$

因为$a_{n+1}a_{n+2}\neq1$，所以

$$a_{n+3}-a_n=0.$$

可知该数列为周期数列，且周期$T=3$，所以

$$a_1+a_2+a_3=6,S_{2021}=4041.$$

评注　当递推关系式为相邻项之和或积时，往往采用进位或退位相减法化简递推关系式.

**例5**　（多选题）已知斐波那契数列$\{F_n\}$满足$F_1=1$，$F_2=1$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n(n\geqslant1)$，则以下选项正确的有（　　）.

A. $F_2+F_4+\cdots+F_{2n}=F_{2n+1}$　　B. $F_1+F_3+\cdots+F_{2n-1}=F_{2n}$

C. $F_{3n}$为偶数　　D. $F_{4n}$为3的倍数

解答　**方法一**：先计算$\{F_n\}$前几项，排除选项A，保留选项B，C，D. 再利用数学归纳法可证明选项B，C，D均正确. 所以选BCD.

**方法二**：因为

$$F_{2n+1}=F_{2n}+F_{2n-1},$$

所以

$$F_{2n}=F_{2n+1}-F_{2n-1}.$$

从而

$$F_2+F_4+\cdots+F_{2n}=F_{2n+1}-F_1=F_{2n+1}-1,$$

所以选项 A 错误.

因为 $F_{2n}=F_{2n-1}+F_{2n-2}(n\geqslant 2)$，所以，当 $n\geqslant 2$ 时，

$$F_1+F_3+\cdots+F_{2n-1}=F_1+(F_4-F_2)+\cdots+(F_{2n}-F_{2n-2})=F_{2n}$$

成立，所以选项 B 正确.

因为 $F_{3n+3}=F_{3n+2}+F_{3n+1}=2F_{3n+1}+F_{3n}$，且 $F_3=2$ 为偶数，所以 $F_{3n}$ 均为偶数，所以选项 C 正确. 同理可得 $F_{4n}$ 为 3 的倍数，所以选项 D 正确.

综上可知，选 BCD.

评注　斐波那契数列是大自然中非常神奇的一种数列，它最早来源于意大利数学家列昂纳多·斐波那契提出的数学问题：

兔子出生以后两个月就能生小兔子，若每次不多不少恰好生一对(一雌一雄)，且每月生一次. 假如养了一对小兔子，如果生下的小兔子都不死的话，一年以后共有多少对兔子？

不止在生小兔子问题中，在现实生活、经济、自然界中，我们也总能看到斐波那契数列的身影，如植物叶序、树枝生长、生产能力发展变化趋势等.

斐波那契数列有着许多有趣的性质，除了本题选项中的几条性质，还有其他一些性质，列举部分性质如下.

(1)斐波那契数列的第 $n+2$ 项同时也代表了集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中所有不包含相邻正整数的子集个数.

(2)第 3,6,9 等项的数字能被 2 整除；第 4,8,12 等项的数字能被 3 整除；第 5,10,15 等项的数字能被 5 整除；其余以此类推.

(3)$F_{n-1}F_{n+2}-F_nF_{n+1}=(-1)^n(n\geqslant 2)$.

(4)前 $n$ 项和 $\sum\limits_{k=1}^{n}F_k=F_{n+2}-1$.

### 1.1.2　数列的前 $n$ 项和与通项的关系

数列的前 $n$ 项和与通项问题是一对不可分割的问题，主要表现在两个方面：一方面 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，另一方面 $a_n=\begin{cases}S_1, & n=1,\\ S_n-S_{n-1}, & n\geqslant 2.\end{cases}$

**例 6**　已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$.

(1)若 $S_n=3^n-1$，求 $a_n$.

(2)若 $S_n=n^2+2n-1$，求 $a_n$.

解答　(1)当 $n=1$ 时，

$$a_1=S_1=2;$$

当 $n\geqslant 2$ 时，

$$a_n=S_n-S_{n-1}=2\times 3^{n-1}.$$

综上可得 $a_n=2\times 3^{n-1}$.

(2)当 $n=1$ 时，

$$a_1=S_1=2;$$

当 $n\geqslant 2$ 时，

$$a_n=S_n-S_{n-1}=2n+1.$$

综上可得 $a_n=\begin{cases}2, & n=1,\\ 2n+1, & n\geqslant 2.\end{cases}$

**例 7** (1)在数列$\{a_n\}$中，若 $a_{n+1}$是 2 和 $S_n$ 的等差中项，且 $a_1=1$，则 $a_n=$_____.

(2)设数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和为 $S_n$，且 $a_1=1$，$\dfrac{S_{n+1}+1}{S_n+1}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立，则 $a_2=$_____，$a_n=$_____.

解答 (1)对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，若 $a_{n+1}$是 2 和 $S_n$ 的等差中项，则 $2a_{n+1}=2+S_n$，所以

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(2a_{n+1}-2)-(2a_n-2)=2a_{n+1}-2a_n(n\geqslant 2),$$

化简得

$$a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n(n\geqslant 2).$$

而 $a_1=1$，$2a_2=2+S_1$，所以 $a_2=\dfrac{3}{2}$，可得

$$a_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.$$

(2)当 $n=1$ 时，有$\dfrac{S_2+1}{S_1+1}=\dfrac{a_2}{a_1}$，即 $a_2=a_1^2+a_1$，所以

$$a_2=2.$$

由$\dfrac{S_{n+1}+1}{S_n+1}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$得

$$\frac{S_{n+1}+1}{a_{n+1}}=\frac{S_n+1}{a_n}.$$

可知数列$\left\{\dfrac{S_n+1}{a_n}\right\}$是常数列，故$\dfrac{S_n+1}{a_n}=\dfrac{S_1+1}{a_1}=2$，所以

$$S_n+1=2a_n.$$

用 $n-1$ 代替 $n$ 并作差，可得

$$a_n=2a_{n-1}(n\geqslant 2).$$

因为 $a_1=1$，$a_2=2$，所以

$$a_n=2^{n-1}.$$

评注 构造数列的方法往往比较灵活，解题时我们需要仔细观察并分析清楚已知条件式的结构，在准确判断结构的基础上，进行合理构造来求解问题.

**例 8**　已知等差数列$\{a_n\}$的首项$a_1=1$，公差$d>0$，且第 2 项、第 5 项、第 14 项分别是等比数列$\{b_n\}$的第 2 项、第 3 项、第 4 项.

(1)求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式.

(2)设数列$\{c_n\}$对$n\in\mathbf{N}^*$均有$\frac{c_1}{b_1}+\frac{c_2}{b_2}+\cdots+\frac{c_n}{b_n}=a_{n+1}$成立，求$c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{2010}$.

分析　已知数列前$n$项和求数列的通项问题，通常需要考虑退位相减法，此题中(2)的关系式本质上是一个数列和的表达式.

解答　(1)由已知有$a_2=1+d$，$a_5=1+4d$，$a_{14}=1+13d$，所以

$$(1+4d)^2=(1+d)(1+13d),$$

解得$d=2$或$d=0$(舍去). 所以

$$a_n=1+2(n-1)=2n-1.$$

又$b_2=a_2=3$，$b_3=a_5=9$，所以数列$\{b_n\}$的公比为 3，故

$$b_n=3\times3^{n-2}=3^{n-1}.$$

(2)当$n\geqslant2$时，因为

$$\frac{c_1}{b_1}+\frac{c_2}{b_2}+\cdots+\frac{c_n}{b_n}=a_{n+1},$$

所以

$$\frac{c_1}{b_1}+\frac{c_2}{b_2}+\cdots+\frac{c_{n-1}}{b_{n-1}}=a_n.$$

两式相减可得

$$\frac{c_n}{b_n}=a_{n+1}-a_n=2,$$

所以

$$c_n=2b_n=2\times3^{n-1}(n\geqslant2).$$

当$n=1$时，$\frac{c_1}{b_1}=a_2$，所以$c_1=3$，故

$$c_n=\begin{cases}3, & n=1,\\ 2\times3^{n-1}, & n\geqslant2.\end{cases}$$

所以$c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{2010}=3+\frac{6-2\times3^{2010}}{1-3}=3+(-3+3^{2010})=3^{2010}$.

### 1.1.3　数列中的差分思想

事实上，数列的和与通项关系的本质是差分思想，进一步类比和拓展，还可以得到如下关系.

(1)$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$，或

$a_1=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)+a_n$；

(2)(拓展公式)已知 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,结合(1)可得

$$\begin{aligned}S_n&=[(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)+a_n]+[(a_2-a_3)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)+a_n]\\&\quad+\cdots+a_n\\&=(a_1-a_2)+2(a_2-a_3)+\cdots+(n-1)(a_{n-1}-a_n)+na_n.\end{aligned}$$

上式为阿贝尔变换的一种特殊情形.关于阿贝尔变换的有关知识,感兴趣的同学可自行查阅相关资料.这里我们对上式做如下推导:

$$\begin{aligned}S_n&=a_1+a_2+\cdots+a_n\\&=a_1+(2-1)a_2+(3-2)a_3+\cdots+[n-(n-1)]a_n\\&=(a_1-a_2)+2(a_2-a_3)+\cdots+(n-1)(a_{n-1}-a_n)+na_n.\end{aligned}$$

**例 9** 已知数列$\{a_n\}$的前三项与数列$\{b_n\}$的前三项对应相同,且 $a_1+2a_2+2^2a_3+\cdots+2^{n-1}a_n=8n$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立,$\{b_{n+1}-b_n\}$是等差数列.

(1)求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式.

(2)是否存在 $k\in\mathbf{N}^*$,使得 $b_k-a_k\in(0,1)$? 请说明理由.

解答 (1)已知

$$a_1+2a_2+2^2a_3+\cdots+2^{n-1}a_n=8n\quad①,$$

当 $n\geqslant2$ 时,

$$a_1+2a_2+2^2a_3+\cdots+2^{n-2}a_{n-1}=8(n-1)\quad②.$$

①−②得 $2^{n-1}a_n=8$,即

$$a_n=2^{4-n}(n\geqslant2).$$

又 $a_1=8=2^{4-1}$,综上可得

$$a_n=2^{4-n}(n\in\mathbf{N}^*).$$

由题意知 $b_1=8,b_2=4,b_3=2$,所以

$$b_2-b_1=-4,b_3-b_2=-2.$$

因为$\{b_{n+1}-b_n\}$是等差数列,其公差为 $-2-(-4)=2$,所以

$$b_{n+1}-b_n=-4+(n-1)\times2=2n-6,$$

所以

$$\begin{aligned}b_n&=b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_n-b_{n-1})\\&=8+(-4)+(-2)+\cdots+(2n-8)\\&=n^2-7n+14.\end{aligned}$$

(2)由(1)可得

$$b_k-a_k=k^2-7k+14-2^{4-k}.$$

当 $k\geqslant4$ 时,$f(k)=\left(k-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{7}{4}-2^{4-k}$单调递增,且 $f(4)=1$.所以,当 $k\geqslant4$ 时,

$$f(k)=k^2-7k+14-2^{4-k}\geqslant1.$$

因为 $f(1)=f(2)=f(3)=0$，所以不存在 $k\in\mathbf{N}^*$，使得 $b_k-a_k\in(0,1)$.

**例 10**　已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为非负数，其前 $n$ 项和为 $S_n$，且对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_{n+1}\leqslant\frac{a_n+a_{n+2}}{2}$.

(1)若 $a_1=1$，$a_{505}=2017$，求 $a_6$ 的最大值.

(2)若对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $S_n\leqslant1$，证明：$0\leqslant a_n-a_{n+1}\leqslant\frac{2}{n(n+1)}$.

分析　由 $a_{n+1}\leqslant\frac{a_n+a_{n+2}}{2}$ 容易联想到等差数列，所以需要从递推关系的本质(变形为差分形式)入手，找到此题的突破口.

解答　(1)由题意知

$$a_{n+1}-a_n\leqslant a_{n+2}-a_{n+1}.$$

设 $d_i=a_{i+1}-a_i(i=1,2,\cdots,504)$，则

$$d_1\leqslant d_2\leqslant d_3\leqslant\cdots\leqslant d_{504}，且\ d_1+d_2+d_3+\cdots+d_{504}=2016.$$

因为

$$\frac{d_1+d_2+\cdots+d_5}{5}\leqslant\frac{d_6+d_7+\cdots+d_{504}}{499}=\frac{2016-(d_1+d_2+\cdots+d_5)}{499},$$

所以

$$d_1+d_2+\cdots+d_5\leqslant20.$$

从而

$$a_6=a_1+(d_1+d_2+\cdots+d_5)\leqslant21,$$

当且仅当 $d_1=d_2=\cdots=d_5=\frac{2016}{504}=4$ 时，等号成立. 所以 $a_6$ 的最大值为 21.

(2)若存在 $k\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_k<a_{k+1}$，则由 $a_{n+1}\leqslant\frac{a_n+a_{n+2}}{2}$ 可得

$$a_{k+2}-a_{k+1}\geqslant a_{k+1}-a_k>0,$$

因此，从第 $k$ 项开始，数列 $\{a_n\}$ 单调递增，故

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant a_k+a_{k+1}+\cdots+a_n>(n-k+1)a_k.$$

对于固定的 $k$，当 $n$ 足够大时，必有 $a_1+a_2+\cdots+a_n>1$，与题设矛盾，所以 $\{a_n\}$ 为不增数列，即只能 $a_n-a_{n+1}\geqslant0$.

令 $b_k=a_k-a_{k+1}(k\in\mathbf{N}^*)$，由 $a_k-a_{k+1}\geqslant a_{k+1}-a_{k+2}$ 得

$$b_k\geqslant b_{k+1},b_k>0.$$

由前述差分公式可得

$$1\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+2b_2+\cdots+nb_n+(n+1)a_{n+1}$$

$$\geqslant(1+2+\cdots+n)b_n=\frac{n(n+1)}{2}b_n,$$

所以

$$b_n \leqslant \frac{2}{n(n+1)}.$$

综上，对一切 $n \in \mathbf{N}^*$，都有 $0 \leqslant a_n - a_{n+1} \leqslant \frac{2}{n(n+1)}$.

### 1.1.4 无穷数列中常见的极限问题

在中学阶段，无穷数列中涉及的一些常见的极限公式如下.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$；

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q|<1, \\ 1, & q=1, \\ \text{不存在}, & |q|>1 \text{ 或 } q=-1, \end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)=1$；

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

**例 11** （新人教 A 版选择性必修第二册 P38）如图 1.1-1，正方形 $ABCD$ 的边长为 5cm，取正方形 $ABCD$ 各边的中点 $E,F,G,H$，作第 2 个正方形 $EFGH$，然后取正方形 $EFGH$ 各边的中点 $I,J,K,L$，作第 3 个正方形 $IJKL$，依此方法一直继续下去.

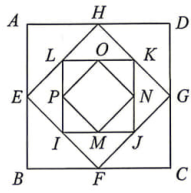


图 1.1-1

(1)从正方形 $ABCD$ 开始，求连续 10 个正方形的面积之和.

(2)如果这个作图过程可以一直继续下去，那么所有这些正方形的面积之和将趋近于多少？

解答　设正方形 $ABCD$ 的面积为 $a_1$，后续各正方形的面积依次为 $a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$，则

$$a_1=25, a_{k+1}=\frac{1}{2}a_k.$$

所以：

(1)$S_{10}=50\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]=\frac{25575}{512}(\mathrm{cm}^2)$.

(2)$S_n=50\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$，当 $n$ 无限增大时，$S_n$ 趋近于 $50(\mathrm{cm}^2)$.

评注　无穷等比数列求和问题是数列求和的一类重要问题，要引起足够的重视.

## 思考题

**1.** 0-1 周期序列在通信技术中有着重要应用. 若序列 $a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 满足 $a_i\in\{0,1\}(i=1,2,\cdots)$，且存在正整数 $m$，使得 $a_{i+m}=a_i(i=1,2,\cdots)$ 成立，则称其为 0-1 周期序列，并称满足 $a_{i+m}=a_i(i=1,2,\cdots)$ 的最小正整数 $m$ 为这个序列的周期. 对于周期为 $m$ 的 0-1 周期序列 $a_1a_2\cdots a_n\cdots$，$C(k)=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}a_ia_{i+k}(k=1,2,\cdots,m-1)$ 是描述其性质的重要指标. 在下列周期为 5 的 0-1 周期序列中，满足 $C(k)\leqslant\dfrac{1}{5}(k=1,2,3,4)$ 的周期序列是(　　).

A. 11010⋯　　B. 11011⋯　　C. 10001⋯　　D. 11001⋯

**2.** 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，且满足 $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_n=-2S_nS_{n-1}(n\geqslant2)$，则 $S_n=$_____，$a_n=$_____.

**3.** 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=m$（$m$ 为正整数），$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2}, & a_n\text{ 为偶数},\\ 3a_n+1, & a_n\text{ 为奇数}.\end{cases}$ 若 $a_6=1$，则 $m$ 的所有可能的取值为_____.

**4.** 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$，$b_n=\dfrac{a_n-1}{a_n+1}$，则 $b_n=$_____.

**5.** 设数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，$\dfrac{2S_{n+1}+1}{2S_n+1}=\dfrac{a_2}{a_1}=k(k>0,n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)证明：$\{a_n\}$ 是等比数列.

(2)若 $a_1+a_2=4$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\log_3a_n-\dfrac{c}{a_n}$，其前 $n$ 项和为 $T_n$，满足对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$T_n\geqslant T_3$，求正实数 $c$ 的取值范围.

**6.** 记 $S_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和，$b_n$ 为数列 $\{S_n\}$ 的前 $n$ 项积，已知 $\dfrac{2}{S_n}+\dfrac{1}{b_n}=2$.

(1)证明：$\{b_n\}$ 是等差数列.

(2)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

**7.** 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a$，$a_2=b$，$2a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.

(1)设 $b_n=a_{n+1}-a_n$，证明：若 $a\neq b$，则 $\{b_n\}$ 是等比数列.

(2)(拓展题)若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=4$，求 $a,b$ 的值.

# 1.2 数列性质多，最美单调性

## 1.2.1 数列按变化规律分类

数列按照项的变化规律可以分为四类.

(1)**递增数列**，如：1，4，9，25，36；

(2)**递减数列**，如：32，16，8，4，1；

(3)**摆动数列**，如：1，−2，3，−4，5，−6；

(4)**常数数列**，如：0，0，0，0，0.

## 1.2.2 数列单调性的定义

数列的单调性可以用相邻项作差并比较符号来定义.

(1)若对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，均有 $a_{n+1}-a_n=0$ 成立，则称数列$\{a_n\}$为**常数数列**.

(2)若对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，均有 $a_{n+1}-a_n>0$ 成立，则称数列$\{a_n\}$为**单调递增数列**.

（若对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，均有 $a_{n+1}-a_n\geqslant 0$ 成立，则称数列$\{a_n\}$为**单调不减数列**.）

若对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，均有 $a_{n+1}-a_n<0$ 成立，则称数列$\{a_n\}$为**单调递减数列**.

（若对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，均有 $a_{n+1}-a_n\leqslant 0$ 成立，则称数列$\{a_n\}$为**单调不增数列**.）

(3)若存在 $n_0\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_{n_0+1}-a_{n_0}<0$，且存在 $m_0\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_{m_0+1}-a_{m_0}>0$，则称数列$\{a_n\}$为**不单调数列**(摆动数列).

**例 1** 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_n=\dfrac{n+1}{2^n}$，证明：数列$\{a_n\}$单调递减.

证明 因为 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{n+2}{2^{n+1}}-\dfrac{n+1}{2^n}=\dfrac{-n}{2^{n+1}}<0$ 恒成立，所以数列$\{a_n\}$单调递减.

**例 2** 已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数，其前 $n$ 项和 $S_n$ 满足 $a_n\cdot S_n=9(n=1,2,\cdots)$. 给出下列四个结论：

①$\{a_n\}$的第 2 项小于 3；　　②$\{a_n\}$是等比数列；

③$\{a_n\}$为递减数列；　　④$\{a_n\}$中存在小于$\dfrac{1}{100}$的项.

其中所有正确结论的序号是_____.

解答 由题意可知，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_n>0$.

当 $n=1$ 时，$a_1^2=9$，可得 $a_1=3$.

当 $n\geqslant 2$ 时，由 $S_n=\dfrac{9}{a_n}$可得 $S_{n-1}=\dfrac{9}{a_{n-1}}$，两式作差可得

$$a_n=\frac{9}{a_n}-\frac{9}{a_{n-1}}.$$

所以$\frac{9}{a_{n-1}}=\frac{9}{a_n}-a_n$，则$\frac{9}{a_2}-a_2=3$，整理得

$$a_2^2+3a_2-9=0.$$

因为$a_2>0$，解得$a_2=\frac{3\sqrt{5}-3}{2}<3$，故①正确.

假设$\{a_n\}$是等比数列，设其公比为$q$，则$a_2^2=a_1a_3$，即

$$\left(\frac{9}{S_2}\right)^2=\frac{81}{S_1S_3},$$

所以$S_2^2=S_1S_3$，可得

$$a_1^2(1+q)^2=a_1^2(1+q+q^2),$$

解得$q=0$，不合题意. 故$\{a_n\}$不是等比数列，②错误.

当$n\geqslant 2$时，$a_n=\frac{9}{a_n}-\frac{9}{a_{n-1}}=\frac{9(a_{n-1}-a_n)}{a_na_{n-1}}>0$，可得$a_n<a_{n-1}$. 所以$\{a_n\}$是递减数列，③正确.

假设对任意$n\in\mathbf{N}^*$，$a_n\geqslant\frac{1}{100}$，则$S_{100000}\geqslant 100000\times\frac{1}{100}=1000$，所以

$$a_{100000}=\frac{9}{S_{100000}}\leqslant\frac{9}{1000}<\frac{1}{100},$$

与假设矛盾，假设不成立，④正确.

故答案为①③④.

### 1.2.3　判断数列的最大(小)项之作差法

(1)若存在$n_0\in\mathbf{N}^*$，使得对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，均有$a_n\geqslant a_{n_0}$成立，则称$a_{n_0}$为数列$\{a_n\}$的最小项. 如果最小项不是第一项，则必有$a_{n_0+1}\geqslant a_{n_0}$且$a_{n_0-1}\geqslant a_{n_0}$.

(2)若存在$n_0\in\mathbf{N}^*$，使得对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，均有$a_n\leqslant a_{n_0}$成立，则称$a_{n_0}$为数列$\{a_n\}$的最大项. 如果最大项不是第一项，则必有$a_{n_0+1}\leqslant a_{n_0}$且$a_{n_0-1}\leqslant a_{n_0}$.

**例 3**　已知数列$\{a_n\}$的通项$a_n=(n+1)\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^n(n\in\mathbf{N}^*)$，问：数列$\{a_n\}$是否有最大项？若有，求出最大项的项数；若没有，请说明理由.

解答　由已知可得

$$a_{n+1}-a_n=(n+2)\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^{n+1}-(n+1)\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^n=\left(\frac{10}{11}\right)^n\cdot\frac{9-n}{11}.$$

同理

$$a_n-a_{n-1}=\left(\frac{10}{11}\right)^{n-1}\cdot\frac{10-n}{11}.$$