

本书荣获高效能品牌图书TOP榜“专题专项类”金奖

高中数学新体系 （修订版）

立体几何的秘密

苏立标（特级教师）：编著

深度学习“立几”的基本量问题

触及本源，化解“立几”学习的痛点

让“立几”问题不再淹没在茫茫的运算之中

突破“立几”学习的两大重要技巧：转化与借用

从“破”与“立”入手，重构知识，重现其独有的脉络感

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

落霞与孤鹜齐飞　秋水共长天一色

——“立几”印象，只为欣赏空间图形的魅力

“前不见古人，后不见来者，念天地之悠悠，独怆然而涕下.”这是唐代文学家陈子昂对时间与空间的认识.时间的模型是一条两端无限延伸的直线，诗人处在原点，天与地各为两个平面，悠悠地、无限地延展着……几何就是在这样的空间中缓缓地拉开了序幕.这里的诗人、时间、天与地构成了点、线、面，而点、线、面则是构成空间几何图形的基本元素.立体几何是研究现实世界中物体的形状、大小与位置关系的数学学科，是认识空间图形，培养和发展空间想象能力、推理论证能力、运用图形语言进行交流能力以及几何直观能力的一门学科.

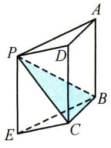
初识“立几”，惊鸿一瞥.大到浩瀚星空，小到微观粒子，都是立体几何所研究的范畴.

正如李尚志老师所描绘的：“锥顶柱身立海天，高低大小也浑然；平行垂直皆风景，有角有棱足壮观.”该诗生动、形象地描述了立体几何研究的对象是空间几何体.就像是一个建筑物，建筑物的顶部是锥体，底部是柱体，墙的边缘、屋顶的边缘形成多面体的棱和角，棱与棱之间有的平行，有的垂直，这些既是大自然的风景，也是立体几何研究的主角.诗中还体现了一个生活哲理：壮丽的风景不能只要大的不要小的，只要高的不要低的，有大也有小，有高也有低，有平行也要有垂直，多姿多彩，浑然一体，才是风景，才够壮观.从这个角度来看立体几何问题，其研究范围包罗万象，丰富多彩，无处不在，无时不有.可以说，立体几何的问题就是“顶天立地”的问题.

再识“立几”，惊叹于其无比严密的推理过程，竟把推理“玩弄于股掌之间”而游刃有余.曾经看过这样一个题目：

一个正三棱锥与一个正四棱锥，它们的所有棱长都相等，把这个正三棱锥的一个侧面重合在正四棱锥的一个侧面上，这个组合体的面有几个？

题目给出的参考答案是 7 个面. 其实，如图所示，当正三棱锥 P-BCE 的一个侧面与正四棱锥 P-$ABCD$ 的一个侧面重合时，得到的是一个三棱柱，共 5 个面，因为正四棱锥 P-$ABCD$ 的两个侧面所成的角与正三棱锥 P-BCE 的两个侧面所成的角正好互补，所以 P,E,C,D 四点共面，因此这个组合体共有 5 个面.



在学习立体几何的过程中，我们需要具备几何直观想象能力. 几何直观想象是揭示现代数学本质的有力工具，是认识几何图形的基础. 借助于几何直观、几何解释，启迪思路，这可以帮助我们理解和接受立体几何抽象的内容. 但只有直观想象而没有严密推理的数学是非常可怕的.

正如章建跃博士所说："如果说数学运算是数学的童子功，那么数学推理则是数学的命根子."推理是解答立体几何问题的重要思维载体，在推理过程中渗透公理化思想，有助于养成言必有据的理性思维精神. 所以立体几何问题解答的推理过程要步步有据，条条有理，一步一骤总关"理". 从这个角度来看，立体几何是最讲"理"的数学学科，是推理的天堂. 在这里，大有"不懂推理者请勿入内"之范.

回眸"立几"时，大有蓦然回首之感. 立体几何是代数与几何的完美结合. 古人云："风马牛不相及."但立体几何却将空间、平面与向量集于一体，而且是"举杯邀明月，对影成三人"的和谐景象. 事实上，很多同学在学习立体几何问题时，有很多的无奈和苦衷，很多时候错把几何问题当作代数来学，让美妙的几何问题淹没在茫茫的运算之中. 从这个角度来看，重振立体几何的"几何雄风"迫在眉睫，这是本书成册的一个美好的初衷，也是探索立体几何秘密的重要通道. 读完本书后，你在解答立体几何问题时，即便不依赖建系法，也不再会面对题目束手无策；解题时无需再纠结于建系与非建系，而是能在两种方法之间自由切换，做到游刃有余、胸有成竹.

本书从立体几何学科的特点出发，重点讨论立体几何的基本量问题的深度学习(第一章)，从学生学习立体几何的困惑点切入，重点突破立体几何学习中的**转化**与**借用**两大技巧(第二、三章)，两大技巧的巧妙应用能助我们的学习一臂之力，弥补空间想象能力的不足. 向量几何的思想渗透，体现了数学学习的整体性，其结果是使我们站在更高层次上理解立体几何(第四章). 同时，本书既直面立体几何学习的重难点问题，又兼顾高考的热点问题(像正方体、球体等)的探究(第五章).

本书试图从"破"与"立"入手，对知识进行脱胎换骨式的重构，打通知识内在的"任督二脉"，盘活知识，使之变成鲜活的知识，使之变得更加丰满，重现其独有的脉络感. 对方法进行深

度架构，使得方法呈现立体骨感，凸显其系统性，达到一种境界：信手拈来，谈笑间樯橹灰飞烟灭.本书对于知识方法不求面面俱到，但求点点独到，触及问题的本源，化解立体几何学习的痛点.

本次修订顺应新高考要求，更新了部分例题，回归几何本源，着力完善知识结构与内涵.例如在“补图形”中新增锥体、在“借图形”中新增平行六面体、在“借结论”中新增三面角定理、在球体问题中补充棱切球相关内容等，使知识储备更加系统丰盈.此外，本书继续深化深度学习，在知识交汇点挖掘立体几何的独特魅力，如立体几何与圆锥曲线、三角函数、数列等内容的融合，碰撞出精妙而和谐的数学关联.

基于“三新”的教学实践，使得本书得到不断充实更新，更加贴近于新高考学习的需求.为满足更多读者需求，作者录制了部分视频讲座，可在B站搜“立体几何的秘密”观看.欢迎加入“高中数学新体系”图书交流QQ群(群号码：821526438)，就书中内容进行研讨.

让我们走进立体几何，欣赏立体几何的性质，发现立体几何学习的更多的秘密！

苏立标(特级教师)

目录 Contents

第一章 立体几何问题中的基本量

——又见炊烟袅袅升起 …… 1

1.1 基本量——表面积与体积 …… 2

1.1.1 表面积 …… 2

1.1.2 体 积 …… 5

1.1.3 “两积”的最值 …… 10

1.2 基本量——两大位置关系 …… 18

1.2.1 平行关系 …… 19

1.2.2 垂直关系 …… 21

1.3 基本量——三大空间角 …… 23

1.3.1 线线角 …… 23

1.3.2 线面角 …… 27

1.3.3 二面角 …… 36

1.4 基本量——空间的距离 …… 47

第二章 立体几何问题中的转化

——山不转水转 …… 53

2.1 转化为法向量 …… 54

2.2 转化为平面 …… 62

2.2.1 截 面 …… 62

2.2.2 展 开 …… 63

2.2.3 投 影 …… 68

2.3 转化为几何体 …… 73

2.3.1 补成正方体 …… 73

2.3.2 补成长方体 …… 76

2.3.3 补成正四面体 …… 78

2.3.4 补成直三棱柱 …… 80

2.3.5 补成锥体 …… 80

目录

Contents

第三章 立体几何问题中的借用

——春风又绿江南岸 …… 86

3.1 借用符号 …… 87

3.2 借用图形 …… 87

3.2.1 平行六面体 …… 87

3.2.2 正方体或长方体 …… 88

3.2.3 正四面体 …… 90

3.2.4 球 …… 91

3.2.5 圆 锥 …… 92

3.3 借用运算 …… 95

3.3.1 向量三项和的平方公式 …… 95

3.3.2 向量的对角线定理 …… 98

3.4 借用结论 …… 102

3.4.1 三余弦定理 …… 102

3.4.2 三正弦定理 …… 106

3.4.3 最大角与最小角定理 …… 110

3.4.4 三面角定理 …… 118

第四章 立体几何问题中的向量

——小荷才露尖尖角 …… 125

4.1 空间向量的线性运算 …… 126

4.2 空间向量的数量积 …… 129

4.3 空间向量的综合问题 …… 135

第五章 立体几何问题中的探究

——天光云影共徘徊 …… 143

5.1 以数学文化为情境的空间图形问题赏析 …… 144

5.1.1 与世界文化遗产有关 …… 144

5.1.2 与中国古代文化遗产有关 …… 145

目录 Contents

5.1.3 与现代文化有关 …… 154

5.2 活跃在动态空间图形中的轨迹问题综述 …… 157

5.2.1 判断动点轨迹类型的方法 …… 158

5.2.2 求动点轨迹的几何量(长度、周长、面积与体积等) …… 163

5.2.3 求动点轨迹与最值 …… 165

5.3 图形的翻折、旋转问题剖析 …… 172

5.3.1 翻折、旋转问题中的基本量 …… 172

5.3.2 翻折、旋转问题中的轨迹 …… 174

5.3.3 翻折、旋转问题中的最值 …… 176

5.3.4 与其他知识的交汇问题 …… 181

5.4 以正方体为载体的深度学习 …… 187

5.4.1 在正方体中讨论基本量 …… 187

5.4.2 正方体的截面问题 …… 191

5.4.3 正方体的综合问题 …… 192

5.5 高考中有关球的问题 …… 196

5.5.1 与球心有关的问题 …… 197

5.5.2 球的截面问题 …… 198

5.5.3 外接球问题 …… 202

5.5.4 内切球问题 …… 211

5.5.5 棱切球问题 …… 214

5.5.6 球与翻折、展开 …… 216

5.5.7 与球有关的最值问题 …… 219

5.5.8 与球有关的其他问题 …… 223

思考题解答 …… 228

后记——你若盛开清风自来 …… 245

第一章

立体几何问题中的基本量

——又见炊烟袅袅升起

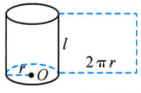
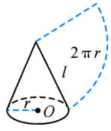
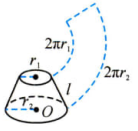
我们从一则案例说起.古代有一次作画比赛,画题是《深山藏古寺》,许多考生都按题意作了画.有的画的是崇山峻岭,在松柏深处有座寺庙;有的画的是山峦之间只露出寺庙一角;有的只在山峦之间画出一幅高高飘着的幡.可是这些画都没有被考官选中.另有一名考生所作的画上有起伏的山峦,密密的松林,唯独没有寺庙,也没有任何寺庙的标志,只有一个和尚正从山脚沿着一条小道挑水上山.最后,这幅画被评为第一名.

你知道创作这幅画用了什么样的手法吗?推理:如果有和尚挑水上山,那么山里就有庙……

这也从某种意义上道出了推理的重要性.推理是打开立体几何大门的一把钥匙,推理是立体几何课程学习的基本技能.欧几里得公理体系把几何与逻辑结合起来,几何就与演绎推理从此结下了不解之缘,几何学成为训练逻辑推理的天然素材.研究立体几何问题,我们就从关键问题,即从立体几何的基本量开始.立体几何中的基本量是构成立体几何问题的核心内容,是立体几何中最璀璨的篇章,也是高中数学重点考查的内容,深刻理解概念与原理是我们在高考等考试中成功的必要条件.

1.1 基本量——表面积与体积

求几何体的体积要充分利用多面体的截面和旋转体的轴截面，将空间问题转化为平面问题，把不规则的几何体化为规则的几何体.

几何体	侧面展开图	侧面积公式
圆柱		$S_{圆柱侧}=2\pi rl$
圆锥		$S_{圆锥侧}=\pi rl$
圆台		$S_{圆台侧}=\pi(r_1+r_2)l$

注：求棱柱、棱锥、棱台的表面积需要先求各个面的面积（不外乎三角形面积，平行四边形面积）.

几何体	表面积	体积
棱柱、圆柱	$S_{表}=S_{侧}+2S_{底}$	$V=Sh$
棱锥、圆锥	$S_{表}=S_{侧}+S_{底}$	$V=\frac{1}{3}Sh$
棱台、圆台	$S_{表}=S_{侧}+S_{上}+S_{下}$	$V=\frac{1}{3}(S_{上}+S_{下}+\sqrt{S_{上}S_{下}})h$
球	$S=4\pi R^2$	$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

1.1.1 表面积

例 1 已知圆锥的顶点为 S，母线 SA 与 SB 所成角的余弦值为 $\frac{7}{8}$，SA 与圆锥底面所成的角为 $45°$. 若 $\triangle SAB$ 的面积为 $5\sqrt{15}$，则该圆锥的侧面积为_____.

解答 因为母线 SA 与 SB 所成角的余弦值为 $\frac{7}{8}$，所以母线 SA 与 SB 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{8}$. 设母线长为 l，又 $\triangle SAB$ 的面积为 $5\sqrt{15}$，故

$$\frac{1}{2}\times l^2\times\frac{\sqrt{15}}{8}=5\sqrt{15},$$

所以 $l=4\sqrt{5}$. 因为 SA 与圆锥底面所成的角为 $45°$，所以底面半径

$$r=l\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}l.$$

所以圆锥的侧面积为

$$\pi rl=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi l^2=40\sqrt{2}\pi.$$

引申　已知某圆锥的底面积为 16π，且它的外接球的体积为 $\frac{500}{3}\pi$，则该圆锥的侧面积为(　　).

A. $16\sqrt{5}\pi$　　B. $8\sqrt{5}\pi$ 或 $20\sqrt{5}\pi$

C. $16\sqrt{5}\pi$ 或 $8\sqrt{5}\pi$　　D. $16\sqrt{5}\pi$ 或 $20\sqrt{5}\pi$

解答　设该圆锥的底面半径为 r，母线长为 l，高为 h，圆锥的外接球的半径为 R，则有

$$\pi r^2 = 16\pi,$$

解得 $r = 4$. 又

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{500}{3}\pi,$$

解得 $R = 5$.

设圆锥底面圆心为 O_1，外接球球心为 O，可得 $R^2 = (h-R)^2 + r^2$，即 $5^2 = (h-5)^2 + 4^2$，整理得

$$h^2 - 10h + 16 = 0,$$

解得 $h = 8$ 或 $h = 2$.

当 $h = 8$ 时，$l = \sqrt{h^2 + r^2} = 4\sqrt{5}$，如图 1.1-1，此时圆锥的侧面积为 $\pi rl = 16\sqrt{5}\pi$；

当 $h = 2$ 时，$l = \sqrt{h^2 + r^2} = 2\sqrt{5}$，如图 1.1-2，此时圆锥的侧面积为 $\pi rl = 8\sqrt{5}\pi$.

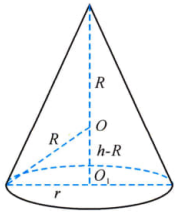


图 1.1-1

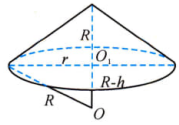


图 1.1-2

故选 C.

例 2　设体积为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 的三棱锥 P-ABC 的顶点都在球 O 的球面上，已知 $PA \perp$ 平面 ABC，$PA = 2$，$\angle BAC = 120°$，$AB = 1$，则球 O 的表面积为_____.

解答　如图 1.1-3，设底面外接圆的半径为 r，圆心为 O_1，连接 OO_1，则 $OO_1 \perp$ 平面 ABC. 又

$$V_{P\text{-}ABC} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle ABC} \times PA = \frac{1}{3} \times S_{\triangle ABC} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}$，即 $\frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. 故 $AC = 1$，$BC = \sqrt{3}$.

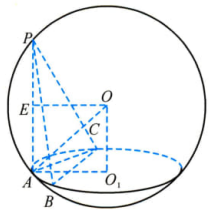


图 1.1-3

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理可得 $2r=\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}=2$，故 $r=1$.

设 PA 的中点为 E，连接 OE，则 $OE\perp PA$.

因为 $PA\perp$ 平面 ABC，所以 $PA\parallel OO_1$. 而 $AO_1\subset$ 平面 ABC，所以 $PA\perp AO_1$.

在矩形 EAO_1O 中，外接球的半径 $R=\sqrt{AE^2+r^2}=\sqrt{2}$，故球 O 的表面积为 $4\pi\times\left(\sqrt{2}\right)^2=8\pi$.

例 3 如图 1.1-4，从正四面体的 4 个顶点处截去 4 个相同的正四面体，得到一个表面由正三角形和正六边形构成的多面体. 若该多面体的表面积是 $14\sqrt{3}$，则该多面体外接球的表面积是_____.

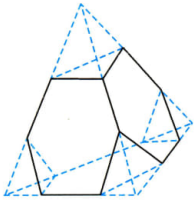


图 1.1-4

解答 设原正四面体的棱长为 a，则该多面体的棱长为 $\dfrac{1}{3}a$，与原正四面体相比较，该多面体表面积少了 8 个边长为 $\dfrac{1}{3}a$ 的正三角形的面积，所以该多面体的表面积为

$$4\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times a^2-8\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{1}{3}a\right)^2=\frac{7\sqrt{3}a^2}{9}=14\sqrt{3},$$

解得 $a=3\sqrt{2}$.

如图 1.1-5，设 O_1 是下底面正六边形 $ABCDEF$ 的中心，O_2 是上底面正三角形 MNG 的中心，由正四面体的对称性可知，该多面体的外接球的球心 O 在原正四面体的高 PO_1 上，所以

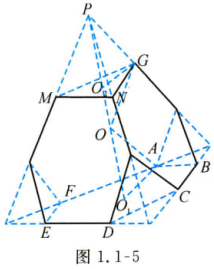


图 1.1-5

$$O_2G=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3},O_1O_2=\frac{2}{3}PO_1=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

设球 O 的半径为 R，在 $\mathrm{Rt}\triangle OO_1A$ 中，$OA^2=O_1A^2+OO_1^2$，即

$$R^2=2+OO_1^2.$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle OO_2G$ 中，$OG^2=OO_2^2+O_2G^2$，即

$$R^2=O_2G^2+\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}-OO_1\right)^2=\frac{2}{3}+\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}-OO_1\right)^2.$$

所以

$$OO_1^2+2=\frac{2}{3}+\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}-OO_1\right)^2,$$

解得 $OO_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，从而 $R=\sqrt{OO_1^2+2}=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$. 因此该多面体外接球的表面积

$$S=4\pi R^2=11\pi.$$

求旋转体的表面积，可以直接套用公式计算，但前提是牢记公式. 对于多面体，除了特殊的正棱柱、正棱锥、正棱台等有求解表面积的公式，其余多面体的表面积只能先把各个面的面积求出来，再相加.

1.1.2　体　积

(1) 祖暅原理法

例 4　祖暅是我国南北朝时期伟大的数学家. 祖暅原理用现代语言可以描述为“夹在两个平行平面之间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果截得的面积总相等，那么这两个几何体的体积相等.”例如可以用祖暅原理推导半球的体积公式，如图 1.1-6，底面半径和高都为 R 的圆柱与半径为 R 的半球放置在同一平面上，然后在圆柱内挖去一个半径为 R、高为 R 的圆锥后得到一个新的几何体. 当用任何一个平行于底面的平面 α 去截这两个几何体时，所截得的截面面积总相等，由此可证明半球的体积和新几何体的体积相等. 若图 1.1-6 中球心 O 到平面 α 的距离为 $\frac{1}{2}R$，则平面 α 所截得的较小部分(即阴影部分，又称为“球冠”) 的几何体的体积是(　　).

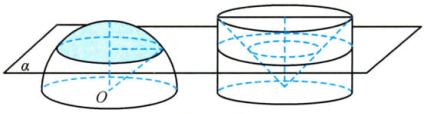


图 1.1-6

A. $\frac{5}{24}\pi R^3$　　B. $\frac{1}{4}\pi R^3$　　C. $\frac{1}{3}\pi R^3$　　D. $\frac{11}{24}\pi R^3$

解答　在圆柱中，因为

$$V_{柱}=\pi R^2\cdot\frac{R}{2}=\frac{\pi R^3}{2},V_{大锥}=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot R,V_{小锥}=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\cdot\frac{R}{2}=\frac{1}{3}\pi R^3\cdot\frac{1}{8},$$

所以

$$V_{锥台}=\frac{1}{3}\pi R^3-\frac{1}{3}\pi R^3\cdot\frac{1}{8}=\frac{7\pi R^3}{24},$$

所以

$$V_{球冠}=\frac{\pi R^3}{2}-\frac{7\pi R^3}{24}=\frac{5\pi R^3}{24}.$$

故选 A.

点评　解本题需要正确理解祖暅原理，利用祖暅原理来求几何体的体积，把不熟悉的几何体转化熟悉的几何体，然后计算其体积.

(2) 公式法

例 5　(2022 年新高考Ⅰ卷) 南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题，其中一部分水蓄入某水库. 当该水库水位为海拔 148.5m 时，相应水面的面积为 140.0km^2；当水位为海拔 157.5m 时，相应水面的面积为 180.0km^2. 将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台，则该水库水位从海拔 148.5m 上升到 157.5m 时，增加的水量约为($\sqrt{7}\approx 2.65$)(　　).

A. $1.0\times10^9\text{m}^3$　　B. $1.2\times10^9\text{m}^3$

C. $1.4\times10^9\text{m}^3$　　D. $1.6\times10^9\text{m}^3$

解答 如图 1.1-7，棱台的高 $h = MN = 157.5 - 148.5 = 9$，则 $S = 140.0\text{km}^2 = 1.4 \times 10^8\text{m}^2$，$S' = 180.0\text{km}^2 = 1.8 \times 10^8\text{m}^2$，所以

$$V = \frac{1}{3}h\left(S + S' + \sqrt{SS'}\right) = 1.437 \times 10^9 \approx 1.4 \times 10^9(\text{m}^3).$$

故选 C.

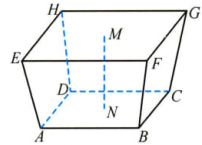


图 1.1-7

例 6 如图 1.1-8，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是 A_1B_1 的中点，平面 ACE 将正方体分成体积为 $V_1, V_2(V_1 \leqslant V_2)$ 的两部分，则 $\dfrac{V_1}{V_2} =$ _____.

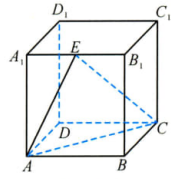


图 1.1-8

解答 如图 1.1-9，取 B_1C_1 的中点 H，连接 CH, EH. 因为 $AC \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，所以 AC 平行于平面 ACE 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的交线.

因为 E, H 分别为 A_1B_1, B_1C_1 的中点，所以 $EH \parallel A_1C_1 \parallel AC$，又平面 $ACE \cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1 = EH$，所以平面 ACE 分正方体为两部分，$EB_1H\text{-}ABC$ 为三棱台.

设正方体的棱长为 2，则正方体的体积为 8，

$$V_1 = V_{EB_1H\text{-}ABC} = \frac{1}{3}(S_{\triangle EB_1H} + S_{\triangle ABC} + \sqrt{S_{\triangle EB_1H} \cdot S_{\triangle ABC}}) \cdot BB_1 = \frac{7}{3}.$$

所以 $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\frac{7}{3}}{8 - \frac{7}{3}} = \dfrac{7}{17}$.

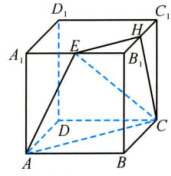


图 1.1-9

引申 1 已知正三棱锥 $S\text{-}ABC$，底面边长为 4，SA, SB, SC 的中点分别为 A', B', C'，$A'B'$ 的中点为 D，$S\text{-}ABC'$ 的外接球球心为 O，且 $OC^2 - OD^2 = AB^2$，则 $V_{S\text{-}ABC} =$ _____.

解答 如图 1.1-10，设 $SD \cap AB = E$，则 E 为 AB 的中点，$S\text{-}ABC'$ 的外接球半径为 r. 由平行四边形的性质得

$$2(OC^2 + OS^2) = SC^2 + (2OC')^2 \Rightarrow OC^2 = \frac{1}{2}SC^2 + r^2.$$

同理

$$2(OE^2 + OS^2) = SE^2 + (2OD)^2.$$

而 $SE^2 = SB^2 - BE^2 = SC^2 - 4, OE^2 = OB^2 - BE^2 = r^2 - 4$，从而

$$OD^2 = r^2 - \frac{1}{4}SC^2 - 1.$$

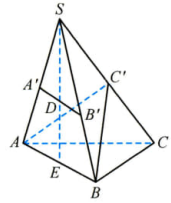


图 1.1-10

由 $OC^2 - OD^2 = AB^2$ 得 $SC = 2\sqrt{5}$，所以三棱锥 $S\text{-}ABC$ 的高为 $2\sqrt{\dfrac{11}{3}}$，因此

$$V_{\text{三棱锥}S\text{-}ABC} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 \times 2\sqrt{\frac{11}{3}} = \frac{8\sqrt{11}}{3}.$$

引申 2　甜品店推出一款巧克力酸奶杯，如图 1.1-11，在装满酸奶的圆台形杯具内有半径分别为 1cm 和 2cm 的两个巧克力球，巧克力小球与杯底和杯壁均相切，大球与小球、杯壁、杯盖均相切，则杯具中酸奶的体积为_____ cm^3.

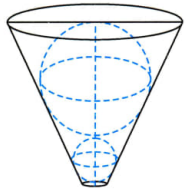


图 1.1-11

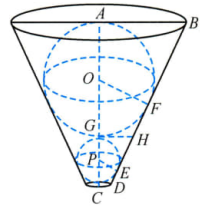


图 1.1-12

解答　设大球的半径为 R，小球的半径为 r，则大球的体积 $V_1=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times 2^3=\frac{32}{3}\pi$，小球的体积 $V_2=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\times 1^3=\frac{4}{3}\pi$，圆台的高 $h=2R+2r=6$. 由切线长性质得 $AB=BF$，$CD=DE$.

由图 1.1-12 易知四边形 $DEPC$、四边形 $PEHG$、四边形 $AOFB$、四边形 $GHFO$ 两两之间相似，所以 $\frac{PC}{CD}=\frac{GH}{GP}=\frac{OG}{GH}=\frac{AB}{AO}$，即 $\frac{1}{CD}=\frac{GH}{1}=\frac{2}{GH}=\frac{AB}{2}$. 解得 $GH=\sqrt{2}$，则 $CD=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$AB=2\sqrt{2}$，则圆台体积

$$V_0=\frac{1}{3}\pi h(AB^2+AB\cdot CD+CD^2)=2\pi\left(8+2+\frac{1}{2}\right)=21\pi,$$

酸奶的体积

$$V=V_0-V_1-V_2=21\pi-\frac{32}{3}\pi-\frac{4}{3}\pi=9\pi.$$

(3) 等积法

例 7　如图 1.1-13，已知 AA_1，BB_1 是圆柱 OO_1 的两条母线，AB，CD 是圆 O 的直径，$AA_1=AB=4$，且 $CD\perp AB$，P 是母线 BB_1 上的动点. 设四面体 O_1-PCD 的体积为 V_1，圆柱 OO_1 的体积为 V_2，求 $V_1:V_2$ 的值.

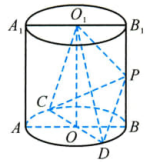


图 1.1-13

解答　因为 $BB_1\parallel OO_1$，$OO_1\subset$ 平面 O_1CD，$BB_1\not\subset$ 平面 O_1CD，所以 $BB_1\parallel$ 平面 O_1CD，所以点 P 到平面 O_1CD 的距离等于点 B 到平面 O_1CD 的距离，所以

$$V_{O_1\text{-}PCD}=V_{P\text{-}O_1CD}=V_{B\text{-}O_1CD}=V_{O_1\text{-}BCD}.$$

所以

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 4\times 2\times 4}{\pi\times 2^2\times 4}=\frac{1}{3\pi}.$$

引申 如图 1.1-14，在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，经过 BC_1 的平面 α 将三棱柱分割成体积相等的两部分. 设 α 与棱 AA_1 相交于点 M，则 $AM:MA_1=$ _____.

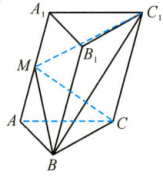


图 1.1-14

解答 设三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的高为 h，点 M 到底面 ABC 的距离为 h_1. 因为 $MA\parallel CC_1$，所以

$$V_{M\text{-}BCC_1}=V_{A\text{-}BCC_1}=V_{C_1\text{-}ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}h.$$

因为 $V_{M\text{-}ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}h_1$，所以

$$V_{M\text{-}BCC_1}+V_{M\text{-}ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}h_1+\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}h.$$

因为经过 BC_1 的平面 α 将三棱柱分割成体积相等的两部分，所以

$$V_{M\text{-}BCC_1}+V_{M\text{-}ABC}=\frac{1}{2}V_{ABC\text{-}A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}h,$$

所以 $\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}h_1+\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}h=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}h$，可得 $h_1=\frac{1}{2}h$.

故 M 为棱 AA_1 的中点，$AM:MA_1=1:1$.

(4) 割补法

例 8 在三棱锥 $A\text{-}BCD$ 中，已知 $AB=AD=BD=CB=CD=2$，$\angle ABC=\angle ADC=90°$，则该四面体的体积等于_____.

解答 如图 1.1-15，取 AC 的中点 E，连接 EB，ED，则 $BE\perp AC$，$DE\perp AC$. 因为 $EB\cap ED=E$，所以 $AC\perp$ 平面 BDE，从而

$$V_{A\text{-}BCD}=V_{A\text{-}BDE}+V_{C\text{-}BDE}.$$

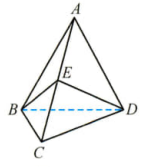


图 1.1-15

在 $\triangle BED$ 中，$ED=EB=\sqrt{2}$，$BD=2$，$EB^2+ED^2=BD^2$，所以 $BE\perp ED$. 故

$$V_{A\text{-}BCD}=V_{A\text{-}BDE}+V_{C\text{-}BDE}=\frac{1}{3}S_{\triangle BDE}\cdot AC=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

引申 1 如图 1.1-16，在五面体 $ABC\text{-}DEF$ 中，棱 AD，BE，CF 互相平行，且两两之间距离均为 1. 若 $AD=1$，$BE=2$，$CF=3$，则该五面体的体积为（　　）.

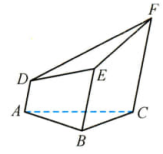


图 1.1-16

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}$

解答 如图 1.1-17，用一个完全相同的五面体 $JIH\text{-}LMN$（顶点与五面体 $ABC\text{-}DEF$ 一一对应）与该五面体相嵌，使得点 D，N，点 E，M，点 F，L 分别重合. 因为 $AD\parallel BE\parallel CF$，且两

两之间的距离为 1，$AD=1$，$BE=2$，$CF=3$，则形成的新组合体为三棱柱，该三棱柱的直截面（与侧棱垂直的截面）是边长为 1 的等边三角形，侧棱长为 $1+3=2+2=3+1=4$，

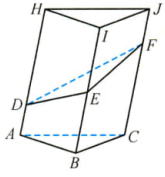


图 1.1-17

$$V_{ABC\text{-}DEF}=\frac{1}{2}V_{ABC\text{-}HIJ}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times4=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故选 C.

引申 2　如图 1.1-18，在棱长为 2 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 M,N 分别是棱 C_1D_1，AA_1 的中点，平面 α 经过 BA_1 和点 M，平面 β 经过 CD_1 和点 N，则该正方体处于平面 α,β 之间部分的体积为（　　）.

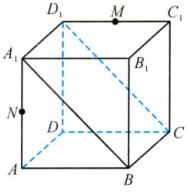


图 1.1-18

A. $\frac{10}{3}$　　B. 4

C. $\frac{17}{3}$　　D. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$

解答　如图 1.1-19，设 CC_1 的中点为 E，因为 M 为 C_1D_1 的中点，所以 $ME\parallel A_1B_1$，则 A_1,B,E,M 四点共面，所以平面 α 截正方体的截面即为平面 A_1BEM.

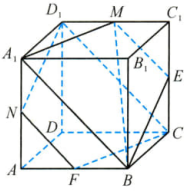


图 1.1-19

设 AB 的中点为 F，因为 N 为 AA_1 的中点，所以 $NF\parallel D_1C$. 同理，平面 β 截正方体截面即为 $NFCD_1$，几何体 $MC_1E\text{-}A_1B_1B$ 为三棱台，由对称可知三棱台 $MC_1E\text{-}A_1B_1B$ 的体积与 $ANF\text{-}DD_1C$ 的体积相等，所以正方体处于平面 α,β 之间部分的体积为正方体的体积减去两个三棱台的体积，

$$V_{MC_1E\text{-}A_1B_1B}=\frac{1}{3}(S_{\triangle MC_1E}+S_{\triangle A_1B_1B}+\sqrt{S_{\triangle MC_1E}S_{\triangle A_1B_1B}})B_1C_1=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+2+\sqrt{2\times\frac{1}{2}}\right)\times2=\frac{7}{3}.$$

所以该正方体处于平面 α,β 之间部分的体积为 $2^3-\frac{7}{3}\times2=\frac{10}{3}$. 故选 A.

引申 3　将棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 绕着其中心旋转 45°，得到一个十面体 $ABCD\text{-}EFGH$（如图 1.1-20），则该十面体的体积为_____.

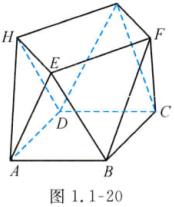


图 1.1-20

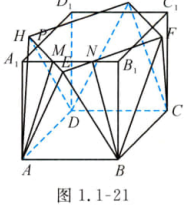


图 1.1-21

解答　如图 1.1-21，作出原正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，A_1B_1 与 HE，EF 的交点分别为 M，N，HE 与 A_1D_1 的交点为 P，上底面非重叠部分是 8 个全等的等腰直角三角形.

设每个等腰直角三角形的边长为 a，则 $2a+\sqrt{2}a=1$，所以 $a=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$，所以

$$MN=\sqrt{2}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}-1.$$

设该十面体的体积为 V，则

$$V=V_{ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1}-4V_{A\text{-}A_1MP}+4V_{E\text{-}ABNM}$$

$$=1-4\times\frac{1}{3}\times S_{\triangle A_1MP}\times A_1A+4\times\frac{1}{3}\times S_{四边形ABNM}\times\frac{1}{2}MN$$

$$=1-4\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2\times1+4\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{\sqrt{2}-1+1}{2}\right)\times1\times\frac{\sqrt{2}-1}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{3}.$$

1.1.3 “两积”的最值

“两积”是指表面积和体积，其最值问题比较综合，需要我们熟练地掌握空间几何体表面积和体积的求法，其中往往需要借助于基本不等式或导数等知识.

例 9 若表面积为 4π 的球内切于圆锥，则该圆锥表面积的最小值为（　　）.

A. 4π　　B. 8π　　C. 12π　　D. 16π

解答　设圆锥内切球的半径为 r，则 $4\pi r^2=4\pi$，解得 $r=1$. 设圆锥的顶点为 A，底面圆周上一点为 B，底面圆心为 C，内切球球心为 D，内切球切母线 AB 于点 E，则圆锥的轴截面如图 1.1-22 所示.

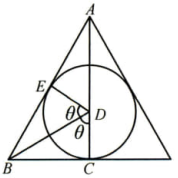


图 1.1-22

底面半径 $BC=R>1$，$\angle BDC=\theta$，则 $\tan\theta=R$. 因为 $\angle ADE=\pi-2\theta$，所以

$$AB=BE+AE=R+\tan(\pi-2\theta)=R-\tan2\theta.$$

又 $\tan2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2R}{1-R^2}$，则 $AB=R-\dfrac{2R}{1-R^2}=\dfrac{R(R^2+1)}{R^2-1}$. 故圆锥的表面积为

$$S=\frac{\pi R^2(R^2+1)}{R^2-1}+\pi R^2=\frac{2\pi R^4}{R^2-1}.$$

令 $t=R^2-1>0$，则 $R^2=t+1$. 因此

$$S=\frac{2\pi(t+1)^2}{t}=2\pi\cdot\left(t+\frac{1}{t}+2\right)\geqslant2\pi\cdot\left(2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}+2\right)=8\pi,$$

当且仅当 $t=1$ 时等号成立，所以该圆锥的表面积的最小值为 8π. 故选 B.

引申 1　如图 1.1-23，已知一个顶点为 P、底面中心为 O 的圆锥的体积为 1，若正四棱锥 $O\text{-}ABCD$ 内接于该圆锥，平面 $ABCD$ 与该圆锥底面平行，A,B,C,D 这四个点都在圆锥的侧面上，则正四棱锥 $O\text{-}ABCD$ 的体积的最大值是_____.

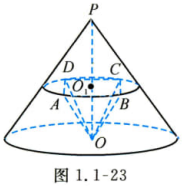


图 1.1-23

解答　设圆锥 PO 的底面半径为 r，高为 h，则

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=1\Rightarrow h=\frac{3}{\pi r^2}.$$

设正四棱锥 $O\text{-}ABCD$ 底面所在圆的半径为 r_1，高为 h_1，于是 $\dfrac{h-h_1}{r_1}=\dfrac{h}{r}$，所以 $h_1=\dfrac{3}{\pi r^2}-\dfrac{3}{\pi r^3}r_1$，从而

$$V_{O\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}\cdot 2r_1^2h_1=\frac{2r_1^2(r-r_1)}{\pi r^3}=\frac{r_1r_1(2r-2r_1)}{\pi r^3}\leqslant\frac{1}{\pi r^3}\left(\frac{2r}{3}\right)^3=\frac{8}{27\pi},$$

当且仅当 $r_1=2r-2r_1$，即 $r_1=\dfrac{2r}{3}$ 时，等号成立. 所以 $O\text{-}ABCD$ 体积的最大值是 $\dfrac{8}{27\pi}$.

引申 2　如图 1.1-24，圆台的上、下底面半径分别为 r_1,r_2，半径为 R 的球与圆台的上、下底面及每条母线均相切，且 $4r_1+r_2=R^2$，则圆台侧面积的最小值为(　　).

A. 100π　　B. 96π　　C. 88π　　D. 81π

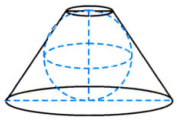


图 1.1-24

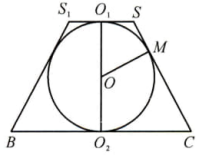


图 1.1-25

解答　图 1.1-25 为几何体的轴截面，O_1,O_2 分别为上、下底面中心，O 为球心，M 为球与母线的切点，台体上、下底面的半径分别为 r_1,r_2.

由切线长定理可得 $SM=O_1S=r_1$，$CM=CO_2=r_2$，所以台体母线长 $l=r_1+r_2$，所以 $2R=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_2-r_1)^2}=2\sqrt{r_1r_2}$，则

$$r_1r_2=R^2=4r_1+r_2\Rightarrow r_2=\frac{4r_1}{r_1-1}(r_1\neq 1).$$

所以台体的侧面积为

$$\pi(r_1+r_2)l=\pi(r_1+r_2)^2=\pi\left(r_1+\frac{4r_1}{r_1-1}\right)^2=\pi\left(r_1-1+\frac{4}{r_1-1}+5\right)^2$$

$$\geqslant\pi\left[2\sqrt{(r_1-1)\times\frac{4}{r_1-1}}+5\right]^2=81\pi,$$

当且仅当 $r_1-1=\dfrac{4}{r_1-1}$，即 $r_1=3$ 时，等号成立. 因此圆台侧面积的最小值为 81π.

故选 D.

引申 3 如图 1.1-26，已知三棱锥 A-BCD 所有顶点都在球 O 的球面上，$AD \perp$ 平面 ABC，$\angle BAC = 90°$，$AD = 2$. 若球 O 的表面积为 29π，则三棱锥 A-BCD 的侧面积的最大值为（　　）.

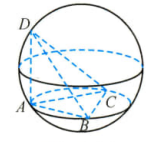


图 1.1-26

A. $5\sqrt{2}+\frac{25}{4}$　　B. $5\sqrt{2}+\frac{5\sqrt{41}}{4}$

C. $6\sqrt{3}+\frac{27}{2}$　　D. $10\sqrt{2}+\frac{25}{2}$

解答　设球 O 的半径为 R，$AB = x$，$AC = y$，由 $4\pi R^2 = 29\pi$ 得 $4R^2 = 29$.

又 $x^2+y^2+2^2 = (2R)^2$，得 $x^2+y^2 = 25$，所以三棱锥 A-BCD 的侧面积

$$S = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} + S_{\triangle ABC} = (x+y) + \frac{1}{2}xy.$$

由 $x^2+y^2 \geqslant 2xy$ 得 $xy \leqslant \frac{25}{2}$，当且仅当 $x = y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立.

由 $\frac{x+y}{2} \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$ 得 $x+y \leqslant 5\sqrt{2}$，当且仅当 $x = y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立，所以 $S \leqslant 5\sqrt{2} + \frac{1}{2}\times\frac{25}{2} = 5\sqrt{2}+\frac{25}{4}$，当且仅当 $x = y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立.

所以三棱锥 A-BCD 的侧面积的最大值为 $5\sqrt{2}+\frac{25}{4}$. 故选 A.

例 10　如图 1.1-27，在半径为 $\sqrt{3}$ 的实心球 O_1 中挖掉一个圆柱，然后将该圆柱重新熔成一个球 O_2，则球 O_2 的表面积的最大值为（　　）.

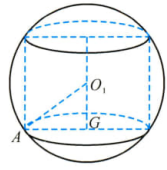


图 1.1-27

A. $4\pi\cdot\left(\frac{27\sqrt{3}}{16}\right)^{\frac{2}{3}}$　　B. $4\pi\cdot\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

C. $4\pi\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{5}{3}}$　　D. $4\pi\cdot 3^{\frac{2}{3}}$

解答　设圆柱的底面半径为 r，则高为 $2\sqrt{3-r^2}\,(0<r<\sqrt{3})$，所以

$$V_{圆柱} = \pi r^2\cdot 2\sqrt{3-r^2} = 2\pi\cdot\sqrt{r^4(3-r^2)} = 2\pi\cdot\sqrt{r^2\cdot r^2\cdot\frac{1}{2}(6-2r^2)}$$

$$\leqslant 2\pi\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{r^2+r^2+6-2r^2}{3}\right)^3} = 4\pi,$$

当且仅当 $r^2 = 6-2r^2$，即 $r = \sqrt{2}$ 时，上式取等号，此时圆柱的体积为 4π.

也可以设 $f(x) = x^2(3-x)(x>0)$，则

$$f'(x) = 2x(3-x) - x^2 = 6x - 3x^2 = 3x(2-x).$$

当 $0<x<2$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>2$ 时，$f'(x)<0$. 所以 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上单调递增，在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递减. 故当 $x=2$ 时，$f(x)$ 取最大值 4，即当 $r^2=2$ 时，圆柱的体积为 4π.

要使熔成的球 O_2 的表面积最大，则其半径最大，即体积最大，因此熔成的球 O_2 的体积也

是 4π，设球 O_2 的半径为 R，所以

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi \Rightarrow R = 3^{\frac{1}{3}}.$$

所以球 O_2 的表面积为 $4\pi R^2 = 4\pi \cdot 3^{\frac{2}{3}}$，故选 D.

引申 1　如图 1.1-28，某圆柱完全在一个棱长为 9 的空心正四面体内部，该圆柱的下底面落在此正四面体一个底面上，当该圆柱的体积最大时，其底面半径为(　　).

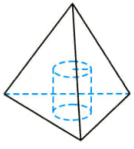


图 1.1-28

A. $\sqrt{3}$　　B. 2

C. $2\sqrt{2}$　　D. 3

解答　如图 1.1-29，设圆柱的上、下底面圆心分别为 O_1，O，其中 O 也是底面正三角形 ABC 的中心.

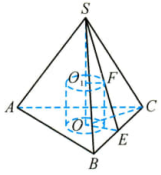


图 1.1-29

因为正四面体 S-ABC 的棱长为 9，可得 $OC = 3\sqrt{3}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle SOC$ 中，$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = 3\sqrt{6}$，且 $OE = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

设圆柱的底面圆的半径为 r，高为 h，由 $\triangle SO_1F \backsim \triangle SOE$ 得 $\dfrac{SO_1}{SO} = \dfrac{O_1F}{OE}$，

即 $\dfrac{3\sqrt{6}-h}{3\sqrt{6}} = \dfrac{r}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$，解得 $h = 3\sqrt{6} - 2\sqrt{2}r$，则圆柱的体积

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2(3\sqrt{6} - 2\sqrt{2}r) = \pi(3\sqrt{6}r^2 - 2\sqrt{2}r^3),$$

其中 $0 < r < \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

令 $f(r) = 3\sqrt{6}r^2 - 2\sqrt{2}r^3$，$r \in \left(0, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，可得

$$f'(r) = 6r(\sqrt{6} - \sqrt{2}r).$$

当 $r \in (0, \sqrt{3})$ 时，$f'(r) > 0$，$f(r)$ 单调递增；

当 $r \in \left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ 时，$f'(r) < 0$，$f(r)$ 单调递减.

所以当 $r = \sqrt{3}$ 时，函数 $f(r)$ 取得最大值，即圆柱的体积取得最大值. 故选 A.

引申 2　如图 1.1-30，在四棱锥 P-$ABCD$ 中，已知 $\angle ABC = \angle ADC = 90°$，$BC = CD = PA = PB = PC = PD = 2$.

(Ⅰ) 证明：$BD \perp$ 平面 PAC.

(Ⅱ) 当四棱锥 P-$ABCD$ 的体积最大时，求二面角 P-BC-A 的大小.

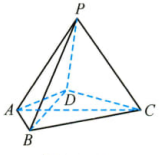


图 1.1-30