

浙大数学优辅

本书荣获高效能品牌图书TOP榜“专题专项类”金奖

向量的秘密

高中数学新体系（修订版）

顾予恒 编著

适应新课程和新高考的新变化

全面覆盖向量的主干知识和重要方法

“数”情画意的向量 展现数与形的完美结合

无处不在的向量 统领高中新的课程体系

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

序　言

向量是高中阶段引入的一个重要的数学研究对象，既构建了线性空间，又形成了代数结构. 它是描述直线、曲线、平面、曲面以及高维空间数学问题的基本工具，为我们提供了一个具体深刻的数学模型，也为进一步的数学学习奠定了基础. 因其特殊地位、价值和独特魅力，一直以来我对向量这座宝库情有独钟，也做了一些研究.

笛卡尔的坐标系成功搭建了“数”与“形”之间的桥梁，向量概念的建立使我们有了集“数”与“形”于一身的数学研究工具. 因此，本书的上篇从“数”与“形”两个角度对向量的知识进行剖析，故取“数”情画意之名.

向量是一种代数运算对象，具有丰富的运算律. 正因为有了运算，向量才能用来刻画几何对象，否则它就只是一个路标. 向量在代数运算中既有简单运用(加、减、数乘、数量积四大基本运算)，也有基于运算律的高级变式(如向量三角不等式).

向量也是描述几何图形的基本工具，具有明确的几何表征. 几何图形组成元素的相互关系(位置关系、大小关系)就是它的基本性质. 只有当我们能在代数语言与几何图形之间进行自由切换时，才算真正掌握了数形结合，并能从图中看穿向量问题.

向量还是一种高级语言，用向量语言可以书写新的高中数学体系. 新课标中首次设置“几何与代数”这条主线. 这样设置的目的，一是为代数(特别是线性代数)的学习建立几何直观感，二是让大家知道如何用代数运算解决几何问题. 平面向量正是“几何与代数”主线的开篇内容，起到统领“几何与代数”主线全部内容的作用. 向量作为工具，能解决函数、不等式、平面几何、立体几何和解析几何中的多种问题，这正是本书的下篇内容.

向量中还蕴含着众多哲理，它与我们的人生有着许多相似之处. 首先，向量是一种既有大小，又有方向的量. 恰如人生，方向与长度(大小)缺一不可. 选择决定了人生的方向，努力决定了人生的长度. 努力的方向很重要，如果将人生的每个阶段都视为一小段向量，只有当它们同

向时，形成的向量模才最长，如果各个阶段方向各异，人生最终也可能是零向量，徒劳无功.因此，人生的选择要尽可能保持方向的一致性.其次，有方向的努力同样重要，向量的长度与起点无关，它的长度是由起点和终点共同决定的.恰如人生，也许你无法选择你的起点，也许你的起点很低，但只要认准目标，大步向前，通过不懈的努力，你就可以改变终点，最终走上人生巅峰.

本书编写时结合了新课程、新教材的理念，始终坚持从**知识学情**和**学生学情**两方面出发，挖掘学生学习向量内容的困惑点，直击向量学习的难点和痛点，从解题人与命题人的不同角度来梳理向量考查的热点，归纳解决向量问题的一般思路和方法.本书还创设了“‘基’情四射”“以大换小”“‘剪刀’模型”“‘圆’来如此”等口诀和模型，帮助读者更好地掌握解题技巧.

书中问题的解决除了呈现答案，还尽可能用一种解释的语言来撰写，让读者读起来就像在听作者讲话，娓娓道来.特别地，书中很多章节还包含编题环节，从命题人的角度呈现一类问题的编制过程，让读者不仅会解题，而且能深刻理解题目的由来和题目背后的奥秘，真正做到“知其然知其所以然”.每讲既可以作为讲义供教师直接进行课堂授课，也适合学生自学.

在“三新”的教学实践下，本书内容得到不断充实，更加贴近于新高考学习的需求.本书在编写的过程中得到了很多老师的帮助，杭州第二中学钱江学校的众多青年教师和吴应富老师帮助我对全书进行了细心的校对，并提出了许多建议，在此表示感谢！

因时间仓促，并限于水平，书中仍难免有不足之处，敬请读者朋友们指正.若对本书有任何修改意见和建议，欢迎加入“高中数学新体系秘密系列”图书交流 QQ 群(群号码:821526438)，就书中内容进行研讨.

顾予恒

目录 Contents

上 篇 “数”情画意的向量

第 1 讲 向量概念与线性运算 …… 1

1.1 平面向量的概念 …… 2

1.2 绕来绕去的向量 …… 3

1.3 线性运算与中线模型 …… 4

第 2 讲 向量大厦的基石——平面向量基本定理 …… 8

2.1 正确认识基底 …… 9

2.2 基底表示向量 …… 9

2.3 基底系数的意义 …… 11

2.4 基本定理的应用 …… 13

2.5 正交基底系下的坐标向量 …… 18

2.6 斜基底系下的坐标向量 …… 20

2.7 “基”情四射的向量——从基于基底的代数视角解决向量问题 …… 22

第 3 讲 从向量共线定理到三点共线 …… 29

3.1 从形到数，向量表示 …… 30

3.2 从数到形，关注系数 …… 32

3.3 数形结合，无中生有 …… 34

3.4 寻根溯源，直线方程 …… 40

第 4 讲 向量“三剑客”——模长、夹角与投影 …… 44

4.1 向量的模长 …… 45

4.2 向量的夹角 …… 50

4.3 向量的投影 …… 57

目录

Contents

第5讲 玩转“剪刀手”模型，轻松搞定数量积 …… 65

5.1 数量积的定义 …… 66

5.2 要素“一问三不知”——转基底 …… 67

5.3 知道一根手指长——转投影 …… 68

5.4 知道指尖连线长——转极化 …… 71

5.5 啥都不定可建系——转坐标 …… 73

5.6 “五W”法则巩固模型 …… 74

第6讲 向量的几何表示——向量，如图所示 …… 79

6.1 以大换小，代数转入几何 …… 80

6.2 动笔画图，探寻几何元素 …… 81

6.3 数形结合，开启编题之旅 …… 92

6.4 视角各异，画图方式不同 …… 94

第7讲 向量运算的灵魂——运算法则显威力 …… 98

7.1 向量基本不等式 …… 99

7.2 向量三角不等式 …… 100

7.3 向量回路恒等式 …… 101

7.4 向量对角线定理 …… 104

7.5 互换系数恒等式 …… 106

7.6 极化恒等式及其对偶形式 …… 108

7.7 三项完全平方公式 …… 111

7.8 向量运算之新定义问题 …… 113

目录 Contents

下　篇　无处不在的向量

第 8 讲　联想与构造——向量与函数不等式 …… 116

8.1　联想模长 …… 117

8.2　联想数量积 …… 118

8.3　联想投影 …… 119

8.4　联想夹角 …… 119

8.5　联想面积 …… 120

8.6　利用不等式、三角函数等知识解向量题 …… 121

第 9 讲　伸缩与旋转——向量与复数 …… 123

第 10 讲　程序与转译——向量与平面几何 …… 128

10.1　向量法解决平面几何问题的思路 …… 129

10.2　向量法解决平面几何问题的工具 …… 129

10.3　平面几何图形的定性研究 …… 129

10.4　平面几何图形的定量研究 …… 132

10.5　向量与三角形的“四心” …… 135

10.6　向量与解三角形 …… 147

第 11 讲　建系与运算——向量与立体几何 …… 153

11.1　从平面向量基本定理到空间向量基本定理 …… 154

11.2　立体几何的建系三类型 …… 154

11.3　立体几何中的空间角问题 …… 157

11.4　立体几何中的空间距离问题 …… 159

目录

Contents

11.5 建系法在翻折问题中的应用 …… 161
11.6 建系法在几何命题中的应用 …… 167
11.7 立体几何中的其他问题 …… 171
第 12 讲 表示与转化——向量与解析几何 …… 181
12.1 向量表示圆锥曲线 …… 182
12.2 利用向量投影求点到直线的距离 …… 185
12.3 利用向量投影求线段的长度 …… 187
12.4 利用向量刻画三点共线 …… 189
12.5 利用向量研究角度 …… 192
12.6 利用向量数量积判断点与圆的位置关系 …… 195
12.7 三角形面积公式的向量形式 …… 197
思考题解答 …… 202

上篇　“数”情画意的向量

第 1 讲

向量概念与线性运算

向量既有大小又有方向，它是刻画现实世界中“既有大小又有方向的量”的数学工具. 运算赋予了向量无穷的威力. 向量的运算与实数运算有所不同，体现在向量的方向上. 而线性运算是向量最基础的运算，它包括向量的加、减与数乘运算，我们从向量的线性运算谈起，逐步揭开向量运算的秘密.

1.1 平面向量的概念

我们称既有大小又有方向的量为**向量**. 向量可以用有向线段$\overrightarrow{AB}$表示，有向线段的长度表示向量的大小，向量$\overrightarrow{AB}$的大小叫作向量的**长度**(或**模**)，记作$|\overrightarrow{AB}|$.

长度相等且方向相同的向量叫作相等向量. 这表明，向量完全由它的方向和模确定，平行移动并不改变向量. 数学中定义的向量是自由的，自由的向量才拥有无穷的力量.

例 1 如图 1.1-1，已知 A,B,C,D,E,F,G,H 是圆 O 上的八个等分点，在以 A,B,C,D,E,F,G,H 及圆心 O 这九个点中的任意两个点为起点与终点的向量中，问：

(1)模长等于圆 O 半径的向量有多少个？

(2)模长等于圆 O 半径的$\sqrt{2}$倍的向量有多少个？

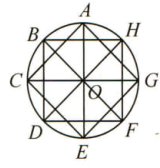


图 1.1-1

分析　观察图形，一个个地数即可. 但需注意，向量用有向线段表示，即一条线段对应两个向量. 在数的时候，应避免遗漏.

解答　(1)模长等于圆 O 半径的向量有$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OG},\overrightarrow{OH};\overrightarrow{AO},\overrightarrow{BO},\overrightarrow{CO},\overrightarrow{DO},\overrightarrow{EO},\overrightarrow{FO},\overrightarrow{GO},\overrightarrow{HO}$. 共 16 个.

(2)模长等于圆 O 半径的$\sqrt{2}$倍的向量有$\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CE},\overrightarrow{EG},\overrightarrow{GA},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{DF},\overrightarrow{FH},\overrightarrow{HB};\overrightarrow{CA},\overrightarrow{EC},\overrightarrow{GE},\overrightarrow{AG},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{FD},\overrightarrow{HF},\overrightarrow{BH}$. 共 16 个.

点评　此题考查平面向量的概念，向量不仅有长度，而且有方向. 只有深刻理解平面向量的概念，解题时才能做到不遗漏.

例 2 两个全等的正三角形 ABC 与 PQR 如图 1.1-2 所示，D,E,F,G,H,K 分别是两个三角形各边的三等分点. 设$\triangle ABC$ 的边长为 $3a$，在所有以 A,B,C,D,E,F,G,H,K,P,Q,R 中任意两个点为端点，长度为 a 的向量中，问：

(1)与$\overrightarrow{BE}$相等的向量有哪几个？

(2)与$\overrightarrow{BE}$的模相等的向量有多少个？

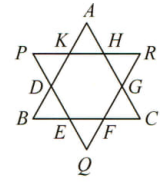


图 1.1-2

分析　向量相等必须是向量的长度相等且方向相同，两者缺一不可.

解答　(1)与$\overrightarrow{BE}$相等的向量有$\overrightarrow{EF},\overrightarrow{FC},\overrightarrow{PK},\overrightarrow{KH},\overrightarrow{HR}$.

(2)与$\overrightarrow{BE}$的模相等的向量即为模等于 a 的向量. 六角星的六个角构成的三角形恰好都是边长为 a 的等边三角形. 共有 18 条边，36 个向量，除去$\overrightarrow{BE}$本身，共有 35 个与$\overrightarrow{BE}$的模相等的向量.

1.2　绕来绕去的向量

在初中物理实验课上，我们通过实验知道了力的合成满足平行四边形法则，它是向量加法平行四边形法则的物理模型. 但这只告诉了我们结果，并不能帮助我们理解为何向量的加法满足平行四边形法则. 更易于帮助我们理解的是位移的合成，即向量加法的三角形法则.

如图 1.2-1，质点从 A 运动到 B，再从 B 运动到 C，其位移的结果等价于质点从 A 直接运动到 C，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

如图 1.2-2，质点从 A 出发，经过多次运动最终到达 F. 其位移的结果等价于质点从 A 直接运动到 F，即 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}$.

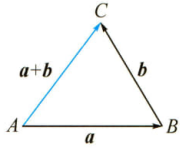


图 1.2-1

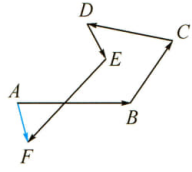


图 1.2-2

故我们定义向量的加法满足三角形法则，而平行四边形法则与三角形法则是等价的. 类似于图 1.2-2 这样绕来绕去的向量加法在解决向量运算问题时极为常用，我们通常称之为**回路法**.

例 1　如图 1.2-3，在△ABC 中，设三边 AB，BC，CA 的中点分别为 E，F，D，则 $\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{FA}=$(　　).

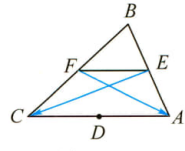


图 1.2-3

A. $\overrightarrow{BD}$　　B. $\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

C. $\overrightarrow{AC}$　　D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

分析　将向量 $\overrightarrow{EC}$ 与 $\overrightarrow{FA}$ 用回路法表示，问题便迎刃而解.

解答　$\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{FA}=(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC})+(\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EA})=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{FC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{BD}$，故本题选 A.

点评　回路法所选用的向量并不唯一，本题也可选择 $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CA}$，条条大路通罗马.

例 2　如图 1.2-4，边长为 1 的正方形 $ABCD$ 的中心与半径为 1 的圆 O 的圆心重合，P 是圆 O 上的动点，判断 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$ 是否为定值，并说明理由.

分析　由于向量 $\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PC}$ 的模长与夹角都在变，无法直接求解. 若考虑建系，则运算量偏大，故选择回路法更简洁.

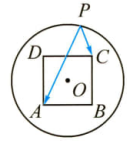


图 1.2-4

解答 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OC})$

$=|\overrightarrow{PO}|^2+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$

$=|\overrightarrow{PO}|^2+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$

$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

故$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$为定值$\frac{1}{2}$.

例 3 如图 1.2-5，在四边形 $ABCD$ 中，E,F 分别是边 AD,BC 的中点，对角线 $AC=\sqrt{2}$，$BD=\sqrt{3}$，且 $EF=1$. 记对角线 AC 与 BD 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=$_____.

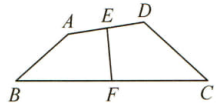


图 1.2-5

分析 已知条件中并没有提及向量，看似为一道普通的平面几何问题，若用平面几何的方法求夹角，则难以下手，我们尝试使用向量来解决该问题.

解答 由回路法得

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC},\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{ED}.$$

两式相减得

$$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{EF}.$$

再两边平方得 $2+3-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=4$，故$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}$，即

$$|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|\cos\theta=\frac{1}{2}.$$

所以 $\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{12}$.

点评 回路法看似绕来绕去，化简为繁，实则方向明确，清晰明了，更有曲径通幽之美. 将一个未知的向量表示成几个已知向量之和，这些已知向量具备了成为基底的潜质.

1.3 线性运算与中线模型

向量运算成就了向量这一超级工具. 线性运算则是最基础的运算，它为奠定向量大厦的基石——平面向量基本定理做好了充分的准备. 几何图形能帮助我们对向量的线性运算形成更加直观的认识.

向量加法的图形表示(图 1.3-1 和图 1.3-2)：

共起点使用平行四边形法则

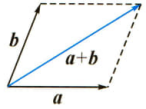


图 1.3-1

首尾相接使用三角形法则

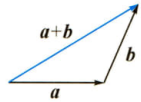


图 1.3-2

向量加法的字母表示：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

向量加法的坐标表示：$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$.

向量减法的图形表示(图 1.3-3 和图 1.3-4)：

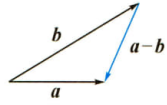


图 1.3-3

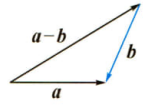


图 1.3-4

向量减法的字母表示：

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$(共起点，指被减)；$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$(共终点，顺势减).

向量减法的坐标表示：$(x_1,y_1)-(x_2,y_2)=(x_1-x_2,y_1-y_2)$.

中线模型 1(三角形)：如图 1.3-5，已知线段 BC 的中点为 D，则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$.

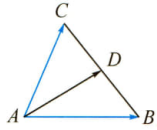


图 1.3-5

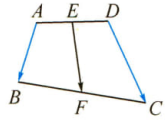


图 1.3-6

中线模型 2(四边形)：如图 1.3-6，已知线段 AD 的中点为 E，BC 的中点为 F，则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{EF}$.

证明　结合图形可知 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}$，$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$，相加得 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{EF}$.

例 1　已知 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内的任意一点，若 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$，则点 P 与 $\triangle ABC$ 的位置关系是(　　).

A. 点 P 在线段 AB 上　　B. 点 P 在线段 BC 上

C. 点 P 在线段 AC 上　　D. 点 P 在 $\triangle ABC$ 外部

分析　对于一个复杂的向量和式，需要通过加减运算进行化简.

解答　因为 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$，所以

$$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{AP}.$$

故点 P 在线段 AC 上，选 C.

点评　题目所给的向量等式往往需要化简，当无法直接化简时，可先尝试移项进行代数变形.

例 2　已知点 A,B,C 在圆 $x^2+y^2=4$ 上运动，且 $AB\perp AC$，点 M 在圆 $x^2+y^2=1$ 上运动，则 $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ 的最大值为_____.

解答　因为 $AB\perp AC$，所以 BC 为直径. 记坐标原点为 O，则 $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MO}$，故

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MO}.$$

当 M 在线段 AO 的延长线上时，$|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ 取到最大值 5.

点评　三角形中线模型的本质即为向量加法的平行四边形法则. 本题先计算 $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$，消去了动点 B 与 C，转化为定点 O，使问题简单化.

例 3　如图 1.3-7，在四边形 $ABCD$ 中，E,F 分别是边 AD,BC 的中点，$AB=\sqrt{2}$，$EF=1$，$CD=\sqrt{3}$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=$_____.

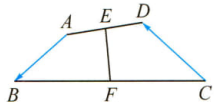


图 1.3-7

解答　由“中线模型 2(四边形)”得

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{EF}.$$

等号两边平方得 $2+3+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=4$，所以

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=-\frac{1}{2}.$$

故 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}$.

点评　“中线模型 2(四边形)”由回路法证明，本题与 1.2 节的例 3 类似，也可使用回路法解答. 知道了中线模型，解题方向则更明确，速度也更快.

思考题

1. 下列命题中的假命题是(　　).

A. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 的长度相等　　B. 两个相等向量若起点相同，则终点相同

C. 只有零向量的模等于 0　　D. 共线的单位向量都相等

2. 已知四边形 $ABCD$，O 为任意一点，若 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$，那么四边形 $ABCD$ 的形状是_____.

3. 已知 P 为$\triangle ABC$ 所在平面内的任意一点，若$\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{BP}$，其中 $\lambda\in\mathbf{R}$，则点 P 一定在(　　).

A. 边 AB 所在的直线上　　B. 边 AC 所在的直线上

C. 边 BC 所在的直线上　　D. $\triangle ABC$ 的内部

4. 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不平行，向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 平行，则实数 $\lambda=$_____.

5. 设 D,E,F 分别是$\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 上的点，且$\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{BD},\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EA},\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，则$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$与$\overrightarrow{BC}$(　　).

A. 反向平行　　B. 同向平行

C. 互相垂直　　D. 既不平行也不垂直

6. 设 M 为平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点，O 为平行四边形 $ABCD$ 所在平面内的任意一点，则$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$等于(　　).

A. $\overrightarrow{OM}$　　B. $2\overrightarrow{OM}$　　C. $3\overrightarrow{OM}$　　D. $4\overrightarrow{OM}$

7. (多选题)已知正六边形 $ABCDEF$ 的中心为 O，则(　　).

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\mathbf{0}$　　B. $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{DE}$

C. 存在 $\lambda\in\mathbf{R}$，$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})$　　D. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{FC}$

8. (多选题)设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c},\overrightarrow{CO}=\boldsymbol{d}$，$|\boldsymbol{a}|=4,|\boldsymbol{b}|=2,|\boldsymbol{c}|=1$，则(　　).

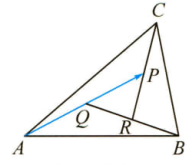
A. $\boldsymbol{d}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$　　B. $|\boldsymbol{d}|$ 的取值范围是$[1,7]$

C. $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}$ 的最大值是 7　　D. $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}$ 的最小值是 -7

9. 将函数 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)$和 $g(x)=k(x-1)$图象的所有交点从左到右依次记为 $A_1,A_2,\cdots,A_{11}$，若点 P 的坐标为$(0,1)$，则$|\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots+\overrightarrow{PA_{11}}|=$_____.

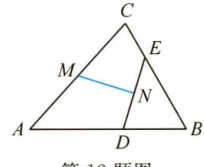
10. 点 P 是外接圆半径为 1 的正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内或边界上的点，记$|\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}|$的最大值为 M. 当 $n=6$ 时，$M=$_____；当 $n=5$ 时，$M=$_____.

11. 如图，在$\triangle ABC$ 中，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$AP$ 的中点为 Q，BQ 的中点为 R，CR 的中点恰为 P，则$\overrightarrow{AP}=$_____.(用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示)



第 11 题图

12. 如图，在$\triangle ABC$ 中，已知 D,E 分别是边 AB,BC 上的点，且 $CE=1,AD=2$. M,N 分别是线段 AC,DE 的中点，$\angle B=60^\circ$，求线段 MN 的长度.



第 12 题图

第2讲

向量大厦的基石——平面向量基本定理

平面向量基本定理在向量知识体系中占有重要地位，是联系几何和代数的桥梁，也是向量坐标法的基础．它的价值在于用两个确定的基底向量可以表示平面上的任意一个向量，从而使得向量成为“可操纵的对象”，为向量发挥巨大威力奠定基础．平面向量基本定理的相关内容是高考考查的重要内容，在历年的高考真题中屡见不鲜．

2.1　正确认识基底

平面向量基本定理之所以含有“基本”二字，就在于要用到表示向量的“基底”.

首先，基底反映了相应空间的本质. 我们通常说的“直线是一维的”“平面是二维的”“空间是三维的”，这个“维”的具体表达就是“基底”. 实际上，平面基本性质中的“两条相交直线确定唯一一个平面”，用向量语言表示，就是“两个不共线的向量是平面的一组基底”. 基底的选择不唯一，两个向量能够成为基底只有一个标准，就是它们不共线，如$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，或$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OM}+n\overrightarrow{ON}$，只需$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$不共线，或$\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}$不共线.

其次，用基底可以对平面内的任意向量作唯一表示. 若$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$，则$\lambda=m,\mu=n$. 基于基底的向量线性表示，建立了向量空间与线性代数之间的联系，这是它的力量所在. 于是就建立了一种“基准”，使得原本各自为政的向量有了统一的表示. 从而，向量成为“可操纵的对象”，为通过运算、推理解决几何问题奠定了基础，同时也指引了思考方向.

例 1　下列说法错误的是(　　).

A. 基底中的向量不能为零向量

B. 平面内的任意两个向量都可以作为一组基底

C. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，且 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\mu_1\boldsymbol{b}=\lambda_2\boldsymbol{a}+\mu_2\boldsymbol{b}$，则 $\lambda_1=\lambda_2,\mu_1=\mu_2$

D. 平面向量的基底不唯一，只要基底确定后，平面内的任意一个向量都可被这组基底唯一表示

解答　由基底概念可知，显然选项 B 错误，因为两个不共线向量才能成为基底. 故选 B.

2.2　基底表示向量

用基底表示向量是平面向量基本定理的重要价值，使得任意的向量都可以被基底唯一表示.

例 1　已知 $\boldsymbol{a}x^2+\boldsymbol{b}x+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 是关于 x 的一元二次方程，其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为非零向量，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，则该方程(　　).

A. 至少有一个根　　B. 至多有一个根

C. 有两个不相等的根　　D. 根的个数无法确定

解答　由已知 $\boldsymbol{a}x^2+\boldsymbol{b}x+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 得

$$\boldsymbol{c}=-x^2\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b}.$$

由平面向量基本定理知，向量 $\boldsymbol{c}$ 可以由不共线的向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 唯一表示，即

$$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$

故

$$\begin{cases}-x^2=\lambda,\\ -x=\mu.\end{cases}$$

若恰好 $\mu^2=-\lambda$，则这个方程组有唯一根，否则无根. 故至多有一个根，选 B.

点评　实际上，在向量系统中，等式就意味着进行相关量的表示，而表示的唯一性是常考点.

例 2　如图 2.2-1，在△ABC 中，已知 $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{DC}$，$E$ 是 BD 的三等分点. 设 $\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则 $x=$_____，$y=$_____.

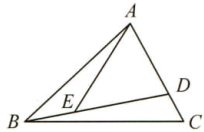


图 2.2-1

解答　**方法一：代数回路法**

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

$$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$$

故 $x=\frac{2}{3}$，$y=\frac{1}{4}$.

方法二：几何分解法

如图 2.2-2，过点 E 作 AC，AB 的平行线交 AB，AC 于点 M，N. 由相似知

$$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$$

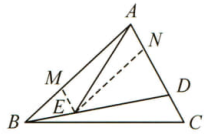


图 2.2-2

故 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

点评　向量是数形结合的产物，因此，用基底表示向量的方法也有代数与几何两种，即一种是通过走回路的代数方法，一种是类似用力的分解原理对向量进行分解的方法.

例 3　如图 2.2-3，在平行四边形 $ABCD$ 中，已知 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$，$CE$ 与 BF 相交于点 G. 记 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AG}=$（　　）.

A. $\frac{2}{7}\boldsymbol{a}+\frac{1}{7}\boldsymbol{b}$　　B. $\frac{2}{7}\boldsymbol{a}+\frac{3}{7}\boldsymbol{b}$

C. $\frac{3}{7}\boldsymbol{a}+\frac{1}{7}\boldsymbol{b}$　　D. $\frac{4}{7}\boldsymbol{a}+\frac{2}{7}\boldsymbol{b}$

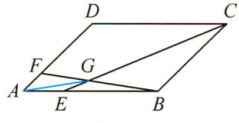


图 2.2-3

解答　因为 E，G，C 三点共线，所以

$$\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AE}+(1-x)\overrightarrow{AC}=\frac{x}{3}\boldsymbol{a}+(1-x)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\left(1-\frac{2x}{3}\right)\boldsymbol{a}+(1-x)\boldsymbol{b}.$$

因为 F,G,B 三点共线，所以

$$\overrightarrow{AG}=y\overrightarrow{AB}+(1-y)\overrightarrow{AF}=y\boldsymbol{a}+\frac{1-y}{4}\boldsymbol{b}.$$

由平面向量基本定理表示方式的唯一性知 $\begin{cases}1-\frac{2}{3}x=y,\\ 1-x=\frac{1-y}{4},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{6}{7},\\ y=\frac{3}{7}.\end{cases}$

所以 $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{7}\boldsymbol{a}+\frac{1}{7}\boldsymbol{b}$. 故选C.

点评　利用三点共线系数关系对同一个向量表示两遍，根据平面向量基本定理表示方式的唯一性列等量关系，求解方程. 这是用代数法处理此类问题的基本思路，体现了方程思想. 当然，本题也可以借助梅涅劳斯定理等平面几何知识，采用“力的分解”法求解.

2.3　基底系数的意义

表达式 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$ 中的系数 λ,μ 有着明确的几何意义.

以 λ 为例，λ 的绝对值就是 $\overrightarrow{OC}$ 在 $\overrightarrow{OA}$ 方向上的分向量 $\overrightarrow{OM}$ 的模长与 $\overrightarrow{OA}$ 的模长之比，即 $|\lambda|=\frac{|\overrightarrow{OM}|}{|\overrightarrow{OA}|}$，$\lambda$ 的正负性由 $\overrightarrow{OM}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 同向还是反向决定：若同向，则 $\lambda>0$；若反向，则 $\lambda<0$. 研究基底系数，作出分向量是关键.

例 1　如图 2.3-1，已知 $OM/\!/AB$，点 P 在由射线 OM、线段 OB 及 AB 延长线围成的区域内（不含边界），且 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则 x 的取值范围是_____；当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，y 的取值范围是_____.

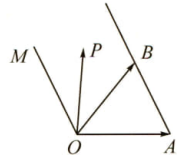


图 2.3-1

分析　将 $\overrightarrow{OP}$ 分解为基底 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 上的分向量和，考查基底系数.

解答　如图 2.3-2，过点 P 作 OA，OB 的平行线，则

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB},\text{且 }x=-\frac{|\overrightarrow{OE}|}{|\overrightarrow{OA}|},y=\frac{|\overrightarrow{EP}|}{|\overrightarrow{OB}|}.$$

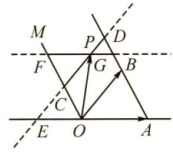


图 2.3-2

随着点 P 在区域内运动，$|\overrightarrow{OE}|\in(0,+\infty)$，故 $x<0$.

当 $x=-\frac{1}{2}$，即 $|\overrightarrow{OE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|$ 时，点 P 在线段 CD 上运动.

当点 P 位于点 C 时，因为 $\triangle OCE\backsim\triangle ABO$，所以 $y=\frac{|\overrightarrow{EC}|}{|\overrightarrow{OB}|}=\frac{|\overrightarrow{EO}|}{|\overrightarrow{OA}|}=\frac{1}{2}$；

当点 P 位于点 D 时，因为 $\triangle ADE\backsim\triangle ABO$，所以 $y=\frac{|\overrightarrow{DE}|}{|\overrightarrow{OB}|}=\frac{|\overrightarrow{EA}|}{|\overrightarrow{OA}|}=\frac{3}{2}$.

综上，$\frac{1}{2}<y<\frac{3}{2}$.

例 2 在△ABC中，已知 D,E,F 分别为 BC,CA,AB 上的点，且 $CD=\frac{3}{5}BC$，$EC=\frac{1}{2}AC$，$AF=\frac{1}{3}AB$. 设 P 为四边形 $AEDF$ 内一点（点 P 不在边界上），若 $\overrightarrow{DP}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}+x\overrightarrow{DE}$，则实数 x 的取值范围是_____.

解答 如图 2.3-3，取线段 BD 的中点 G，则

$$\overrightarrow{DG}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}.$$

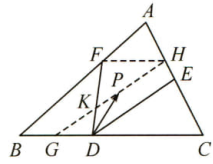


图 2.3-3

过点 G 作 $GH\parallel DE$，交 AC 于点 H，交 DF 于点 K. 因为 $\overrightarrow{DP}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}+x\overrightarrow{DE}$，所以点 P 在线段 KH（不含端点）上运动，且 $x\in\left(\frac{GK}{DE},\frac{GH}{DE}\right)$.

设 $CE=m$，在△CGH 中，由相似得 $\frac{CE}{HE}=\frac{CD}{DG}=3$，得 $HE=\frac{1}{3}m$，$AH=\frac{2}{3}m$.

所以 $\frac{AH}{CH}=\frac{1}{2}=\frac{AF}{BF}$，得 $FH\parallel BC$，所以 $\frac{GK}{KH}=\frac{GD}{FH}=\frac{3}{5}$.

设 $GK=3n$，$KH=5n$，则 $DE=\frac{3}{4}GH=\frac{3}{4}\times 8n=6n$.

故 $\frac{GK}{DE}=\frac{1}{2}$，$\frac{GH}{DE}=\frac{HC}{CE}=\frac{\frac{4}{3}m}{m}=\frac{4}{3}$，所以 $x\in\left(\frac{1}{2},\frac{4}{3}\right)$.

点评 本题多次利用相似的知识求线段长度之比.

例 3 已知直线 PA,PB 分别与半径为 1 的圆 O 相切于点 A,B，$PO=2$，$\overrightarrow{PM}=2\lambda\overrightarrow{PA}+(1-\lambda)\overrightarrow{PB}$. 若点 M 在圆 O 的内部（不包括边界），则实数 λ 的取值范围是_____.

解答 **方法一**：延长 PA 到点 C，使 $PA=AC$. 由已知得

$$\overrightarrow{PM}=\lambda(2\overrightarrow{PA})+(1-\lambda)\overrightarrow{PB}=\lambda\overrightarrow{PC}+(1-\lambda)\overrightarrow{PB}.$$

故 M,B,C 三点共线. 由图 2.3-4 易知，B,O,C 三点共线，且△PBC 是内角为 30°，60°，90°的直角三角形. 过点 M 的 PB 的平行线交 PC 于点 D，过点 M 的 PC 的平行线交 PB 于点 E，则

$$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{PC}+(1-\lambda)\overrightarrow{PB},$$

故 $\lambda=\frac{|\overrightarrow{PD}|}{|\overrightarrow{PC}|}$. 随着点 M 在线段 BM_0（不含端点）上运动，

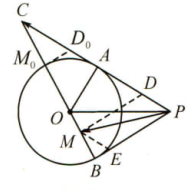


图 2.3-4

$$\lambda=\frac{|\overrightarrow{PD}|}{|\overrightarrow{PC}|}=\frac{|\overrightarrow{MB}|}{|\overrightarrow{BC}|}\in\left(0,\frac{2}{3}\right).$$

方法二：已知 $PO=2$，由切线长定理知 $PA=PB=\sqrt{3}$. 因为

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OP}+2\lambda\overrightarrow{PA}+(1-\lambda)\overrightarrow{PB},$$

又因为点 M 在圆 O 的内部(不包括边界),故 $|\overrightarrow{OM}|<1$. 所以

$$[\overrightarrow{OP}+2\lambda\overrightarrow{PA}+(1-\lambda)\overrightarrow{PB}]^2=9\lambda^2-6\lambda+1<1.$$

解得 $0<\lambda<\frac{2}{3}$.

点评　本题方法一利用了系数的几何意义,方法二则将点在圆内的几何特征转化为点与圆心距离小于半径的代数不等式.

2.4　基本定理的应用

例 1　(多选题)在平行四边形 $ABCD$ 中,P 是边 BC 上一点(不含端点),$\overrightarrow{AP}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AQ}=b\overrightarrow{AB}+a\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AS}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ})$,$\overrightarrow{AR}=(a-0.1)\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AD}$,则(　　).

A. 点 Q 落在 CD 上　　B. 点 S 落在 AC 上

C. 点 R 落在 $\triangle ABC$ 内　　D. $\triangle ACP$ 的面积等于 $\triangle ACQ$ 的面积

解答　对于选项 A,因为 P 是边 BC 上一点(不含端点),所以 $a=1$,$0<b<1$,所以 $\overrightarrow{AQ}=b\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$,所以 Q 落在 CD 上,故 A 正确.

对于选项 B,$\overrightarrow{AS}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ})=\frac{a+b}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{a+b}{2}\overrightarrow{AC}$,其中 $\frac{1}{2}<\frac{a+b}{2}<1$,所以点 S 落在 AC 上,故 B 正确.

对于选项 C,$\overrightarrow{AR}=0.9\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AD}$,当 $b\to1$ 时,显然点 R 会落在 $\triangle ACD$ 内,故 C 错误.

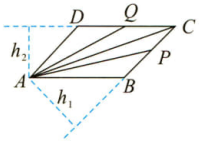


图 2.4-1

对于选项 D,如图 2.4-1,h_1,h_2 分别是点 A 在直线 BC,CD 上的高,因为 $|\overrightarrow{CP}|=(1-b)|\overrightarrow{BC}|$,$|\overrightarrow{CQ}|=(1-b)|\overrightarrow{CD}|$,所以 $S_{\triangle APC}=\frac{1}{2}(1-b)|\overrightarrow{BC}|h_1$,$S_{\triangle AQC}=\frac{1}{2}(1-b)|\overrightarrow{CD}|h_2$. 又因为 $|\overrightarrow{BC}|h_1=|\overrightarrow{CD}|h_2=S_{\square ABCD}$,所以 $S_{\triangle APC}=S_{\triangle AQC}$,故 D 正确.

故选 ABD.

点评　平面向量基本定理的核心功能,是利用一组不共线的基底向量来线性表示平面内的任意向量. 这种表示兼具代数属性与几何意义:从代数角度看,它是向量间的线性运算关系;从几何角度看,它可通过基底向量的线性组合,确定对应向量在平面内的位置. 本题正是借助基底向量的代数表达式,精准定位了相应几何点的位置.

例 2　(多选题)在正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,已知 $AB=AA_1=1$,点 P 满足 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$,其中 $\lambda\in[0,1]$,$\mu\in[0,1]$,则(　　).

A. 当 $\lambda=1$ 时,$\triangle AB_1P$ 的周长为定值