必刷题® | 一轮复习讲义

理想树

600分考点 700分考法®

主编：杨文彬

一书三册 征服全考点



讲透 真题考法



练透 核心考点



答透 解题思路

高考数学

2027

开明出版社

五年真题 考频统计

目录 CONTENTS

第 1 章 集合与常用逻辑用语 讲/练

600 分 能力提升

考点 1 集合的概念与运算 …… 2/223

考法❶ 元素与集合间关系的应用
考法❷ 集合与集合间关系的应用
考法❸ 集合的基本运算 热点
考法❹ 集合中的含参问题 易错
考法❺ 容斥原理的应用
考法❻ 集合新定义问题

考点 2 充分条件与必要条件 全称量词与存在量词 …… 6/224

考法❶ 充分条件与必要条件的判断
考法❷ 根据充分、必要条件求参数的值（范围） 易错
考法❸ 全称量词命题与存在量词命题的否定
考法❹ 判断全称量词命题与存在量词命题的真假
考法❺ 根据命题的真假求参数的取值范围

第 2 章 不等式 讲/练

600 分 能力提升

考点 3 不等式及其性质、一元二次不等式 …… 10/225

考法❶ 不等式性质的应用
考法❷ 一元二次不等式及常见不等式的解法
考法❸ 一元二次不等式恒成立或有解问题的解法

考点 4 基本不等式 …… 13/226

考法❶ 利用基本不等式求最值 易错
考法❷ 利用基本不等式求参数的取值范围
考法❸ 基本不等式的变形

第 3 章 函数 讲/练

第 1 节 函数的概念及性质

600 分 能力提升

考点 5 函数的概念及其表示 …… 17/227

考法❶ 函数定义域的求法 / 考法❷ 函数解析式的求法
考法❸ 函数值域与最值的求法
考法❹ 分段函数及其应用

考点 6 函数的基本性质 …… 20/227

考法❶ 函数单调性或单调区间的判定
考法❷ 利用函数单调性求参数的值（范围）
考法❸ 函数奇偶性的判定 易错
考法❹ 利用函数奇偶性求参数
考法❺ 函数的周期性、图象的对称性及应用 重难
考法❻ 函数的新定义问题

亮点索引 帮你更好地使用这本书哦

典型考例 [全国二 2025 · 3] 集合的交运算(P3)

易混易错 使用集合法解决含参的充分、必要条件问题(P7)

典型考例 [天津 2025 · 15] 换元法解决双参数问题,巧用数形结合(P12)

易混易错 使用基本不等式的条件(P13)

进阶技法 基本不等式链与 n 元基本不等式(P14~15)

典型考例 [全国新课标 I 2024 · 6] 利用分段函数的单调性求参数取值范围(P19)

易混易错 判断函数单调性、奇偶性时忽略定义域(P20~21)

CONTENTS 目录

考点 7 幂函数 …… 24/229
考法 幂函数的图象与性质的应用
考点 8 指数与指数函数 …… 25/229
考法❶ 指数幂的运算
考法❷ 指数函数的图象与性质的应用
考法❸ 指数型函数的综合应用
考点 9 对数与对数函数 …… 27/229
考法❶ 对数式的化简与运算
考法❷ 对数函数的图象与性质的应用
考法❸ 指数函数、对数函数的综合问题
▼700 分 重难突破
专题 1 比较大小问题 …… 29/230
考法❶ 函数性质法 热点
考法❷ 中间值法
考法❸ 构造函数法 重难
专题 2 抽象函数问题 …… 31/231
考法❶ 函数性质法
考法❷ 赋值法
考法❸ 模型法
第 2 节 函数的应用
▼600 分 能力提升
考点 10 函数的图象 …… 34/232
考法❶ 函数图象的变换与识别
考法❷ 函数图象的应用
考法❸ 四种特殊函数的图象与性质
考点 11 函数与方程 …… 37/233
考法❶ 求函数零点所在区间
考法❷ 求零点的个数
考法❸ 与零点有关的参数问题
考法❹ 嵌套零点问题 重难
考点 12 函数模型及其应用 …… 40/234
考法❶ 已知函数模型求解实际问题
考法❷ 构造函数模型求解实际问题
第 4 章 导数及其应用 讲/练
▼600 分 能力提升
考点 13 导数的运算与几何意义 …… 43/236
考法❶ 导数的运算
考法❷ 导数的几何意义 热点
考点 14 利用导数研究函数的单调性、极值、最值 … 45/237
考法❶ 利用导数研究函数的单调性
考法❷ 根据函数的单调性求参数范围

进阶技法 指数函数图象的变换与图象恒过定点问题(P25)

进阶技法 从数值、结构入手,巧设函数,比较大小(P30)

进阶技法 利用初等函数模型快解抽象函数问题(P32)

典型考例 [天津 2025·3]根据函数图象蕴含的性质(奇偶性、单调性、变化趋势)判断函数解析式(P35)

典型考例 [全国新课标Ⅱ 2024·6]利用曲线交点个数求参数(P38)

进阶技法 "设切点"通解切线问题(P43)

目录 CONTENTS

考法❸ 利用导数求函数的极值 热点
考法❹ 利用导数求函数的最值
考法❺ 已知函数的极值、最值求参数

▼700 分 重难突破

专题 3 不等式恒成立与存在性问题 …… 50/239
考法❶ 分离参数 / 考法❷ 分类讨论 热点
考法❸ 端点效应 重难 / 考法❹ 最值转化

专题 4 导数与函数零点问题 …… 53/240
考法❶ 讨论或证明函数的零点个数
考法❷ 与零点有关的参数问题 重难
考法❸ 隐零点问题 重难

专题 5 构造函数法的应用 …… 56/241
考法❶ 含有 $f(x)$，$f'(x)$ 的常见构造法
考法❷ 同构技巧的应用 重难
考法❸ 换元法的应用

专题 6 极值点偏移 …… 60/242
考法 极值点偏移问题 重难

专题 7 放缩技巧 …… 62/243
考法❶ e^x，$\ln x$ 的放缩问题 / 考法❷ 三角放缩

第 5 章 三角函数 讲/练

▼600 分 能力提升

考点 15 三角函数的定义、同角三角函数的基本关系、诱导公式 …… 66/245
考法❶ 三角函数定义的应用 / 考法❷ 扇形基本量问题
考法❸ 同角三角函数的基本关系及其应用 易错
考法❹ 诱导公式及其应用

考点 16 三角恒等变换 …… 69/246
考法❶ 三角函数式的化简问题
考法❷ 三角函数的求值问题 热点

考点 17 三角函数的图象与性质 …… 71/247
考法❶ 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象及变换 易错
考法❷ 三角函数单调性的应用
考法❸ 三角函数的最值及值域
考法❹ 三角函数奇偶性、周期性、函数图象的对称性的应用 热点
考法❺ 三角函数的图象与性质的综合应用

▼700 分 重难突破

专题 8 三角函数中 ω 的取值问题 …… 77/249
考法❶ 单调性与 ω 的取值
考法❷ 最值（值域）与 ω 的取值
考法❸ 零点、极值点与 ω 的取值 重难

热考趋势 ［全国二 2025 · 13］三次函数问题是近年的高考热点，往往是对利用导数研究函数单调性、极值、最值以及零点的综合考查（P47，P49）

进阶技法 双变量恒成立与能成立问题的各种情况与对应的最值关系（P51~52）

进阶技法 根据含有函数及其导数的式子逆向构造原函数的常见形式（P56）

进阶技法 切线放缩的应用（P62）

典型考例 ［全国二 2025 · 8］利用同角三角函数的基本关系与三角恒等变换求值（P70）

典型考例 ［全国一 2025 · 4］利用“整体法”求正切型函数的对称中心（P74）

CONTENTS 目录

第 6 章 平面向量 讲/练

600 分 能力提升

考点 18 平面向量的线性运算、基本定理及坐标运算 … 80/251

考法❶ 平面向量的线性运算

考法❷ 向量共线及其应用

考法❸ 平面向量基本定理及其应用

考法❹ 平面向量的坐标表示及运算 热点

考点 19 平面向量的数量积及其应用 …… 84/252

考法❶ 计算平面向量数量积的方法

考法❷ 投影向量及其应用

考法❸ 平面向量的模 热点 / 考法❹ 平面向量的夹角

700 分 重难突破

专题 9 平面向量的综合应用 …… 87/253

考法❶ 三角形的“四心”与奔驰定理

考法❷ 最值和范围问题 重难

考法❸ 三角恒等变换与平面向量的综合应用

第 7 章 解三角形 讲/练

600 分 能力提升

考点 20 解三角形 …… 92/255

考法❶ 利用正弦定理解三角形 易错

考法❷ 利用余弦定理解三角形

考法❸ 射影定理与三角形的“三线”

考法❹ 综合利用正、余弦定理解三角形 热点

考点 21 解三角形在实际问题中的应用 …… 97/257

考法 解三角形的实际应用

700 分 重难突破

专题 10 解三角形中的最值、范围问题 …… 98/258

考法 最值、范围问题 重难

第 8 章 复数 讲/练

600 分 能力提升

考点 22 复数的概念及运算 …… 101/260

考法❶ 复数的概念、共轭复数、复数相等

考法❷ 复数的四则运算 热点

考法❸ 复数的模 / 考法❹ 复数几何意义的应用

第 9 章 数列 讲/练

600 分 能力提升

考点 23 数列的通项公式和性质 …… 104/261

考法❶ 归纳通项公式 / 考法❷ 已知 S_n 求 a_n 易错

考法❸ 数列的单调性、最值、周期性等性质的应用

热考趋势 [全国二 2025 · 12]属于基础题,但需要学生熟练掌握向量的坐标运算、数量积和模的计算(P83)

进阶技法 数形转化快解平面向量最值、范围问题(P88)

易混易错 解的个数与解的取舍(P92~93)

进阶技法 利用基本不等式法与函数法处理三角形中的最值、范围问题(P98)

热考趋势 [全国二 2025 · 2]复数的四则运算(P102)

易错易混 注意对首项的检验(P104)

目录 CONTENTS

考点 24 等差数列及其前 n 项和 …… 106/262
考法❶ 等差数列的基本运算
考法❷ 等差数列的判定与证明
考法❸ 等差数列的性质及应用 热点
考法❹ 等差数列前 n 项和最值的求法
考点 25 等比数列及其前 n 项和 …… 108/264
考法❶ 等比数列的基本运算
考法❷ 等比数列的判定与证明
考法❸ 等比数列的性质及应用 热点
考法❹ 等差数列、等比数列的综合应用
考点 26 数列求通项 …… 111/266
考法❶ 利用 a_n 与 S_n 的关系求通项
考法❷ 累加法与累乘法
考法❸ 构造法求通项 重难
考点 27 数列求和 …… 114/268
考法❶ 倒序相加法 / 考法❷ 裂项相消法
考法❸ 错位相减法 热点
考法❹ 并项求和法 / 考法❺ 分组求和法

▼700 分 重难突破

专题 11 数列奇偶项问题 …… 118/270
考法❶ 隔项构造型 / 考法❷ 奇偶表达式型 热点
考法❸ 含有 $(-1)^n$ 型
专题 12 数列与函数、不等式的综合应用 …… 120/271
考法❶ 数列与函数的综合问题
考法❷ 数列不等式放缩 重难
专题 13 数列新背景、新定义问题 …… 122/272
考法❶ 数列新背景问题 / 考法❷ 数列新定义问题

第 10 章 立体几何 讲/练

▼600 分 能力提升

考点 28 空间几何体的结构特征、表面积与体积 …… 127/274
考法❶ 空间几何体结构特征的辨析
考法❷ 几何体表面积的计算
考法❸ 几何体体积的计算
考点 29 空间点、线、面的位置关系 …… 130/275
考法❶ 共点、共线、共面问题
考法❷ 空间点、线、面位置关系的判定
考点 30 直线、平面的平行与垂直 …… 131/276
考法❶ 线面平行的判定与应用 热点
考法❷ 面面平行的判定与应用
考法❸ 线面垂直的判定与应用 热点
考法❹ 面面垂直的判定与应用
考点 31 空间向量、空间角与空间距离 …… 134/278
考法❶ 向量法证明平行、垂直
考法❷ 求异面直线所成角

典型考例 [全国二 2025 · 7]灵活使用等差数列的性质,简化运算(P107)

热考趋势 [全国一 2025 · 13][全国二 2025 · 9]利用整体思想、方程思想求等比数列相关量(P108)

进阶技法 常见的裂项形式识别(P117)

进阶技法 数列放缩的常见结构(P121)

进阶技法 利用割补法和等体积法巧求几何体体积(P129)

进阶技法 几何法与向量法解决空间角与空间距离问题(P135~139)

CONTENTS 目录

考法❸ 求线面角 / 考法❹ 求二面角 热点
考法❺ 求空间距离

▼700 分 重难突破

专题 14 外接球、内切球、棱切球问题 …… 140/280
考法❶ 球与正方体、正四面体的组合问题
考法❷ 球与其他几何体的综合问题 热点

专题 15 截面、翻折问题 …… 143/281
考法❶ 与截面有关的综合问题
考法❷ 与翻折有关的综合问题 热点

专题 16 空间动态问题 …… 146/282
考法❶ 空间位置关系的判定
考法❷ 动点轨迹问题 重难
考法❸ 最值、范围问题 重难 / 考法❹ 探索性问题

第 11 章 直线与圆 讲/练

▼600 分 能力提升

考点 32 直线与方程、圆的方程 …… 152/285
考法❶ 直线的倾斜角与斜率
考法❷ 直线方程的求法 易错
考法❸ 两直线位置关系的判断及应用
考法❹ 两直线的交点与距离问题
考法❺ 对称问题 / 考法❻ 求圆的方程
考法❼ 与圆有关的最值问题 重难

考点 33 直线与圆、圆与圆的位置关系 …… 158/286
考法❶ 直线与圆的位置关系问题 热点
考法❷ 圆的切线及其应用
考法❸ 直线与圆相交的弦长问题
考法❹ 圆与圆的位置关系及其应用

第 12 章 圆锥曲线 讲/练

▼600 分 能力提升

考点 34 椭圆 …… 163/287
考法❶ 椭圆的定义及应用
考法❷ 椭圆标准方程的求法
考法❸ 椭圆几何性质的应用 热点
考法❹ 直线与椭圆的位置关系问题 热点

考点 35 双曲线 …… 171/289
考法❶ 双曲线的定义及应用
考法❷ 双曲线标准方程的求法
考法❸ 双曲线几何性质的应用 热点
考法❹ 直线与双曲线的位置关系问题 热点

考点 36 抛物线 …… 177/291
考法❶ 抛物线的定义及几何性质 热点
考法❷ 抛物线方程的求法
考法❸ 直线与抛物线的位置关系问题 热点

进阶技法 利用“等体积法”巧解空间距离问题(P138)

热考趋势 [全国二 2025 · 17]平面四边形翻折为空间几何体(P145)

易混易错 忽略对斜率是否存在的讨论(P152)

典型考例 [全国一 2025 · 7]考查平行直线系与圆的位置关系问题,本质上是考查学生对直线与圆的位置关系和距离公式的综合运用能力(P158)

进阶技法 求椭圆离心率(取值范围)的常用方法(P165)

典型考例 [全国二 2025 · 6]利用抛物线的定义求线段长(P177)

目录 CONTENTS

▼700分 重难突破

专题17 曲线与方程 …… 180/293
考法❶ 直接法 / 考法❷ 定义法 / 考法❸ 相关点法

专题18 圆锥曲线中的弦长与面积问题 …… 182/294
考法❶ 弦长问题 / 考法❷ 点差法与弦中点问题
考法❸ 面积问题 热点

专题19 圆锥曲线中的定点、定值、定直线问题 …… 187/296
考法❶ 定点问题 / 考法❷ 定值问题
考法❸ 定直线问题

专题20 圆锥曲线中的最值、范围问题 …… 190/298
考法 最值、范围问题 热点

专题21 圆锥曲线中的特殊题型 …… 192/299
考法❶ 圆锥曲线中的存在性问题
考法❷ 圆锥曲线中的同构问题
考法❸ 圆锥曲线中的新定义问题

第13章 计数原理 讲/练

▼600分 能力提升

考点37 两个计数原理 …… 198/303
考法❶ 分类加法计数原理的应用
考法❷ 分步乘法计数原理的应用
考法❸ 两个计数原理的综合应用 热点

考点38 排列与组合 …… 200/304
考法❶ 排列问题
考法❷ 组合问题 / 考法❸ 分组分配问题

考点39 二项式定理 …… 203/305
考法❶ 二项展开式的特定项、特定项系数的解法
考法❷ 赋值法研究二项展开式中的系数和问题
考法❸ 二项展开式中的最值问题

第14章 概率与统计 讲/练

▼600分 能力提升

考点40 随机事件及古典概型 …… 208/306
考法❶ 随机事件的判断、求互斥事件及对立事件的概率
考法❷ 古典概型概率的求法 热点

考点41 相互独立事件的概率、条件概率及全概率公式 …… 209/307
考法❶ 相互独立事件的应用 热点
考法❷ 条件概率的求法 / 考法❸ 全概率公式的应用

考点42 离散型随机变量及其分布列、数学期望与方差 …… 212/308
考法❶ 离散型随机变量的分布列的求法

进阶技法 解析几何中求三角形面积的四大方法(P185)

典型考例 [全国一 2025·18]综合考查了利用相关点法表示动点坐标、数形结合思想、椭圆与圆的最值问题(P190)

进阶技法 排列问题的解题方法(P200)

进阶技法 赋值法解决二项展开式系数和问题的常用代入技巧(P204)

进阶技法 正难则反思想快解“至多”“至少”型古典概型概率问题(P208)

CONTENTS 目录

考法❷ 离散型随机变量的数学期望和方差的求解 热点
考法❸ 利用数学期望和方差进行决策
考点 43 二项分布、超几何分布与正态分布 …… 215/310
考法❶ 二项分布的应用 / 考法❷ 超几何分布的应用
考法❸ 正态分布的应用
考点 44 随机抽样与用样本估计总体 …… 217/312
考法❶ 抽样方法及其应用
考法❷ 样本数字特征及用样本估计总体
考点 45 成对数据的统计分析 …… 219/313
考法❶ 变量的相关性的判断 / 考法❷ 回归分析
考法❸ 独立性检验的应用 易错
▼700 分 重难突破
专题 22 概率统计与其他知识的综合 …… 221/315
考法❶ 概率统计与函数、导数的综合问题
考法❷ 概率统计与数列的综合问题 重难

典型考例 [全国一 2025 · 14] 先利用古典概型得到分布列，再计算离散型随机变量的数学期望(P213)

典型考例 [全国一 2025 · 15] 独立性检验的一般步骤与两个分类变量是否有关系的判断方法(P220)

二级结论速查

子集的个数 …… 2
容斥原理 …… 5
双配方的两种常见形式 …… 15
基本不等式的推广 …… 15
柯西不等式 …… 15
函数周期性的相关表达式 …… 22
函数对称性的相关表达式 …… 22
常见的指对型奇函数 …… 28
常见的指对型偶函数 …… 28
常用的泰勒展开式 …… 30
常用的近似值 …… 30
抽象函数对应的初等函数模型 …… 32
三次函数的性质 …… 49
含有 $f(x)$,$f'(x)$ 的构造法 …… 56
双变量型同构 …… 56
指对跨阶型同构 …… 57
常用函数的图象 …… 59
对数均值不等式 …… 60
切线放缩的形式 …… 62
三角放缩常见的几种形式 …… 63
与三角函数图象特征有关的结论 … 76
等和线定理 …… 81
线段定比分点 …… 83
极化恒等式 …… 84
与三角形“四心”有关的结论 …… 87
奔驰定理 …… 87
平面向量中与矩形有关的结论 …… 90
平面四边形对角线向量定理 …… 90
三角形面积公式的向量表示 …… 90
射影定理 …… 94
与三角形“三线”有关的结论 …… 94
正切恒等式 …… 96
正弦平方和 …… 96
余弦平方和 …… 96
三角形面积公式 …… 96
等差数列的性质 …… 107
等比数列的性质 …… 109
等比数列中的补充结论 …… 110
等差数列与等比数列的转化 …… 110
等差数列中的绝对值求和问题 … 117
裂项逆推识别 …… 117
球与正方体组合的结论 …… 140
球与正四面体组合的结论 …… 140
正方体中截面的种类 …… 143
圆锥中的截面及截口曲线 …… 143
点的对称与曲线的对称 …… 155
椭圆的第二定义 …… 163
椭圆的第三定义 …… 163
椭圆焦点三角形的“心” …… 169
椭圆焦点三角形中的内角平分线 … 169
与椭圆焦点三角形相关的离心率 …… 169
椭圆的焦点弦 …… 169
椭圆中与切线相关的结论 …… 170
直线与椭圆相交的有关结论 …… 170
双曲线的第二定义 …… 171
双曲线的第三定义 …… 171
双曲线焦点三角形的“心” …… 175
双曲线焦点三角形中的内角平分线 …… 175
与双曲线渐近线、焦点三角形相关的离心率 …… 175
双曲线的焦点弦 …… 176
与双曲线渐近线有关的结论 …… 176
椭圆与双曲线共焦点问题的相关结论 …… 176
抛物线焦半径的三角表示 …… 179
抛物线中的内接三角形 …… 179
抛物线的切线及切点弦方程 …… 179
与抛物线有关的其他结论 …… 179
抛物线中的焦点弦问题 …… 182
点差法与弦中点问题 …… 184
分组分配问题 …… 201
条件概率的性质 …… 211
相互独立事件 …… 211

习题见《考点精练》

67 第1章 集合与常用逻辑用语

框图串讲

一图串全章 扫码开启省时复习模式!

知识梳理 构建体系

集合与常用逻辑用语

集合

元素与集合

（1）元素的性质:确定性、无序性、互异性

（2）元素与集合的关系:属于(∈)和不属于(∉)

（3）集合的表示方法:列举法、描述法、图示法

【提示】解决含参数的集合问题时,要注意检验集合中元素的互异性.

常见数集

集合	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
符号	N	$\mathbf{N}^*$(或$\mathbf{N}_+$)	Z	Q	R



集合间的关系

（1）子集:$A\subseteq B$，含有n个元素的集合有2^n个子集

（2）非空子集:$A\subseteq B$且$A\neq\varnothing$，含有n个元素的集合有(2^n-1)个非空子集

（3）真子集:$A\subsetneq B$，含有n个元素的集合有(2^n-1)个真子集

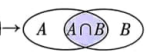
（4）非空真子集:$A\subsetneq B$且$A\neq\varnothing$，含有n个元素的集合有(2^n-2)个非空真子集$(n\geqslant 1)$

（5）空集:空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集

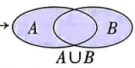
【提示】解决集合间的关系问题时,要注意考虑空集的情况.

集合的运算

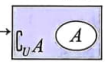
（1）交集:$A\cap B=\{x|x\in A且x\in B\}$→



（2）并集:$A\cup B=\{x|x\in A或x\in B\}$→



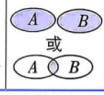
（3）补集:$\complement_U A=\{x|x\in U且x\notin A\}$→



常用逻辑用语

充分条件与必要条件

设A是命题p对应的集合，B是命题q对应的集合

关系	图示	结论
$A\subsetneq B$		p是q的充分不必要条件，q是p的必要不充分条件
$A\supsetneq B$		p是q的必要不充分条件，q是p的充分不必要条件
$A=B$		p是q的充要条件，q是p的充要条件
$A\not\subseteq B$ 且 $B\not\subseteq A$		p是q的既不充分也不必要条件，q是p的既不充分也不必要条件

【注意】只有小范围能推出大范围，大范围不能推出小范围.

全称量词与存在量词

命题名称	命题表示	命题的否定
全称量词命题	$\forall x\in M, p(x)$	$\exists x\in M,\neg p(x)$
存在量词命题	$\exists x\in M,p(x)$	$\forall x\in M,\neg p(x)$

常见结论

（1）$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow A\cap(\complement_U B)=\varnothing\Leftrightarrow(\complement_U A)\cup B=U$,其中$U$为全集

（2）$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

（3）$A\cup(\complement_U A)=U$;$A\cap\complement_U A=\varnothing$;$\complement_U(\complement_U A)=A$,其中$U$为全集

（4）德·摩根定律:$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$;$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$,其中$U$为全集

600分 能力提升

考点1 集合的概念与运算

考法对应练 P223

考频：5年26考注 难度：易

考法1 元素与集合间关系的应用

判断一个元素是否属于一个集合，就是看该元素是否满足这个集合所含元素的共同特征.

(1)对于用列举法表示的集合，只需将所给元素与集合中的元素逐个对照即可.

(2)对于用描述法表示的集合，首先要弄清其元素表示的意义，如$\{y|y=2^x\}$为数集，表示$y=2^x$的函数值y的范围，$\{x|y=2^x\}$为数集，表示使$y=2^x$有意义的x的范围，$\{(x,y)|y=2^x\}$为点集，表示$y=2^x$的图象上的点构成的集合. 根据元素的限制条件(性质)，判断所给元素与集合间的关系.

真题例1 (列举法)[全国乙(理)2022·1]设全集$U=\{1,2,3,4,5\}$，集合M满足$\complement_U M=\{1,3\}$，则 ( )

A. $2\in M$ B. $3\in M$ C. $4\notin M$ D. $5\notin M$

【解析】因为$U=\{1,2,3,4,5\}$，$\complement_U M=\{1,3\}$，则2，4，5$\in M$，故选A.

【答案】A

真题例2 (描述法)[北京2024·10]已知$M=\{(x,y)|y=x+t(x^2-x),1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant t\leqslant 1\}$是平面直角坐标系中的点集. 设$d$是$M$中两点间的距离的最大值，$S$是$M$表示的图形的面积，则 ( )

A. $d=3,S<1$ B. $d=3,S>1$

C. $d=\sqrt{10},S<1$ D. $d=\sqrt{10},S>1$

【解析】分析：题干中出现t,x两个变量的取值范围，可以将t看作常量建立关于x,y的不等式.

$y=x+t(x^2-x)=x+tx(x-1)\geqslant x$，

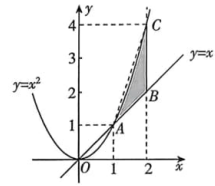
当$t=0$时取等号；

$y=x+t(x^2-x)\leqslant x+(x^2-x)=x^2$，

当$t=1$时取等号.

【提示】当$1\leqslant x\leqslant 2$时，易知$x^2-x\geqslant 0$

因此，集合$M=\{(x,y)|y\leqslant x^2$且$y\geqslant x,1\leqslant x\leqslant 2\}$. 如图，$M$表示的图形为阴影部分(含边界)，记$A(1,1),B(2,2),C(2,4)$，连接$AC$，显然阴影部分的面积$S$小于$S_{\triangle ABC}=2\times 1\div 2=1$，且阴影部分两点间的距离的最大值$d=AC=\sqrt{(2-1)^2+(4-1)^2}=\sqrt{10}$.



【答案】C

试题解读

本题考查对于用描述法表示的集合的理解，正确还原并理解点集所表示的图形区域是解决本题的关键. 充分体现了高考对于学生创造性思维的考查，培养学生数形结合、转化与化归的数学思想.

考法2 集合与集合间关系的应用

1 子集(真子集)个数的求解方法

(1)**列举法**：集合中元素个数较少时，将集合的子集(真子集)一一列举出来，从而得到子集(真子集)的个数. 列举时常依照从小到大，从少到多的原则.

点悟 空集是任何集合的子集，空集是任何非空集合的真子集.

(2)**公式法**：含有n个元素的集合的子集个数是2^n，真子集个数是2^n-1，非空子集个数是2^n-1，非空真子集个数是$2^n-2(n\geqslant 1)$.

2 判断集合之间关系的方法

(1)首先看集合能否化简，能化简的先化简，

注 考频为统计五年全国卷、课标卷、北京卷、天津卷共25套。

然后从表达式判断两集合之间的关系.

(2)根据集合中元素具有的特征之间的关系判断两集合之间的关系.

(3)对于离散型数集或点集,常用列举法或借助 Venn 图判断两集合之间的关系;对于连续型数集,常借助数轴判断两集合之间的关系,此时要注意端点值的取舍.

典题例 3(真子集个数)[江西 2026 届阶段检测]已知集合 $A=\{4,7,10\}$,$B=\{x\mid|x-2|\leqslant 5\}$,则 $A\cap B$ 的真子集个数为 (　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【解析】由题意可知 $B=\{x\mid-3\leqslant x\leqslant 7\}$,

所以 $A\cap B=\{4,7\}$,

【提示】先求出所求集合中的元素,从而确定集合中元素的个数

故 $A\cap B$ 的真子集个数为 $2^2-1=3$,

【提示】利用公式计算真子集个数

故选 C.

【答案】C

典题例 4(集合之间的关系)[云南师大附中 2026 届月考]若全集 $U=\mathbf{R}$,$A=\{x\mid y=\ln(2-x)\}$,$B=\{y\mid y=2^x,x\in\mathbf{R}\}$,则下列关系正确的是 (　　)

A. $A\subseteq B$　　B. $B\subseteq A$

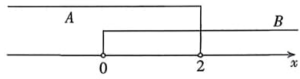
C. $\complement_U A\subseteq B$　　D. $B\subseteq\complement_U A$

【解析】分析:先计算出题干中集合表示的区间,再利用数轴判断集合之间的关系.

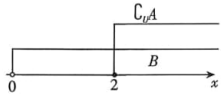
集合 $A=\{x\mid y=\ln(2-x)\}=(-\infty,2)$,集合 $B=\{y\mid y=2^x,x\in\mathbf{R}\}=(0,+\infty)$,

【易错】注意弄清集合中元素表示的意义,集合 A 中元素表示函数的定义域,集合 B 中元素表示函数的值域

$\complement_U A=[2,+\infty)$. 将集合表示在数轴上,由图知只有 C 选项正确.



图①



图②

【答案】C

考法 3　集合的基本运算

解决集合运算问题时应注意以下三点:

(1)看元素构成,即集合中的元素是数还是有序数对,是函数的自变量还是函数值等;

(2)对特征条件进行化简,明确集合中元素的特点;

(3)注意数形结合思想的应用,常见形式有数轴(连续数集)、坐标系(点集)和 Venn 图(离散数集)等.

真题例 5(交集)[全国二 2025·3]已知集合 $A=\{-4,0,1,2,8\}$,$B=\{x\mid x^3=x\}$,则 $A\cap B=$ (　　)

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{1,2,8\}$

C. $\{2,8\}$　　D. $\{0,1\}$

【解析】∵ $A=\{-4,0,1,2,8\}$,$B=\{x\mid x^3=x\}=\{-1,0,1\}$,∴ $A\cap B=\{0,1\}$. 故选 D.

【答案】D

真题例 6(并集)[北京 2024·1]已知集合 $M=\{x\mid-3<x<1\}$,$N=\{x\mid-1\leqslant x<4\}$,则 $M\cup N=$ (　　)

A. $\{x\mid-1\leqslant x<1\}$　　B. $\{x\mid x>-3\}$

C. $\{x\mid-3<x<4\}$　　D. $\{x\mid x<4\}$

【解析】因为集合 $M=\{x\mid-3<x<1\}$,$N=\{x\mid-1\leqslant x<4\}$,所以 $M\cup N=\{x\mid-3<x<4\}$. 故选 C.

【答案】C

真题例 7(补集)[全国甲(理)2024·2]已知集合 $A=\{1,2,3,4,5,9\}$,$B=\{x\mid\sqrt{x}\in A\}$,则 $\complement_A(A\cap B)=$ (　　)

A. $\{1,4,9\}$　　B. $\{3,4,9\}$

C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{2,3,5\}$

【解析】∵ $A=\{1,2,3,4,5,9\}$,∴ $B=\{x\mid\sqrt{x}\in A\}=\{1,4,9,16,25,81\}$,∴ $A\cap B=\{1,4,9\}$,∴ $\complement_A(A\cap B)=\{2,3,5\}$,故选 D.

【答案】D

真题例 8(混合运算)[全国乙(理)2023·2]设全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $M=\{x\mid x<1\}$,$N=\{x\mid-1<x<2\}$,则 $\{x\mid x\geqslant 2\}=$ (　　)

A. $\complement_U(M\cup N)$　　B. $N\cup\complement_U M$

C. $\complement_U(M\cap N)$　　D. $M\cup\complement_U N$

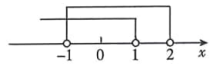
【解析】因为 $M=\{x|x<1\}$，$N=\{x|-1<x<2\}$，

所以 $M\cup N=\{x|x<2\}$，$\complement_U M=\{x|x\geqslant 1\}$，

$M\cap N=\{x|-1<x<1\}$，$\complement_U N=\{x|x\leqslant -1 \text{ 或 } x\geqslant 2\}$，

所以 $\complement_U(M\cup N)=\{x|x\geqslant 2\}$，

$N\cup\complement_U M=\{x|x>-1\}$，$\complement_U(M\cap N)=\{x|x\leqslant -1 \text{ 或 } x\geqslant 1\}$，$M\cup\complement_U N=\{x|x<1 \text{ 或 } x\geqslant 2\}$，故选 A.



【答案】A

考法 4　集合中的含参问题

1 利用集合中元素的性质求参数的值

已知元素属于集合，求集合中参数的值：

步骤 1：利用集合中元素的确定性求出参数的所有取值.

步骤 2：根据集合中元素的互异性对求得的参数值进行验证.

步骤 3：写出所有符合题意的取值.

2 利用集合间的关系求参数的值(或取值范围)

(1)若集合是含有参变量的连续数集，则可以利用数轴求解，由数轴左边小于右边可建立含参数的不等关系.

(2)若未指明集合非空，则应考虑空集的情况，即由 $A\subseteq B$ 知存在 $A=\varnothing$ 和 $A\neq\varnothing$ 两种情况，需要分类讨论.

(3)注意数形结合和分类讨论思想的运用.

3 利用集合运算结果求参数的值(或取值范围)

根据集合运算的结果确定参数的值(或取值范围)的步骤：

化简 → 数轴表示 → 由集合端点大小关系列等式或不等式(组) → 解等式或不等式(组) → 检验

避坑指南　(1)确定不等式的解集时，需检验端点处能否取“=”；(2)若已知集合 A，B，当 $A\cap B=\varnothing$ 时，注意“极端”情况，即 $A=\varnothing$ 或 $B=\varnothing$.

真题例 9　(利用元素性质)[全国新课标Ⅱ 2023·2]设集合 $A=\{0,-a\}$，$B=\{1,a-2,2a-2\}$，若 $A\subseteq B$，则 $a=$　(　)

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{2}{3}$　　D. -1

【解析】有两种情况：$a-2=0$ 或 $2a-2=0$.

【提示】根据集合A中的确定元素0分情况讨论

当 $a-2=0$ 时，$a=2$，此时 $A=\{0,-2\}$，$B=\{1,0,2\}$，不满足 $A\subseteq B$；

当 $2a-2=0$ 时，$a=1$，此时 $A=\{0,-1\}$，$B=\{1,-1,0\}$，满足 $A\subseteq B$.

故选 B.

【答案】B

典题例 10　(利用集合间的关系)已知集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$. 若 $A\cup B=A$，则实数 m 的取值范围为_____.

【解析】$\because A\cup B=A$，$\therefore B\subseteq A$，

【提示】利用集合的运算性质转化为集合之间的关系

①当 $B=\varnothing$ 时，满足 $B\subseteq A$，

【提示】空集是任何集合的子集

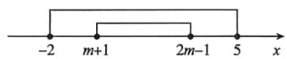
此时 $m+1>2m-1$，$\therefore m<2$；

②当 $B\neq\varnothing$ 时，如图所示，$\because B\subseteq A$，

【提示】涉及连续数集之间的包含关系，常借助数轴求解

$$\therefore\begin{cases}m+1\leqslant 2m-1,\\ m+1\geqslant -2,\\ 2m-1\leqslant 5,\end{cases}\quad \text{解得 } 2\leqslant m\leqslant 3.$$

【提示】当$m=2$或$m=3$时，代入验证，满足题意



综上，m 的取值范围为 $(-\infty,3]$.

【答案】$(-\infty,3]$

易错警示

若集合 B 是用区间形式 $[m+1,2m-1]$ 给出的，则由区间定义隐含着 $m+1<2m-1$，无需对集合 B 是空集的情况进行讨论，这点需要注意区分.

考法5 容斥原理的应用

容斥原理的基本思想是先不考虑重叠的情况，把包含于某内容中的所有对象的数目先计算出来，然后再把计数时重复计算的数目排斥出去，使得计算的结果既无遗漏又无重复.

如果被计数的事物有 A，B 两类，那么 A 类和 B 类元素个数的总和 $=A$ 类元素个数 $+B$ 类元素个数 $-$ 既是 A 类又是 B 类的元素个数，即 $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$.

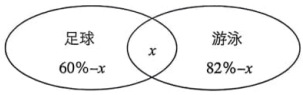
类比两个集合，可以得到三个集合的类似公式：$\mathrm{card}(A\cup B\cup C)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)+\mathrm{card}(C)-\mathrm{card}(A\cap B)-\mathrm{card}(B\cap C)-\mathrm{card}(C\cap A)+\mathrm{card}(A\cap B\cap C)$.

真题例 11 [全国新高考Ⅰ 2020·5] 某中学的学生积极参加体育锻炼，其中有 96% 的学生喜欢足球或游泳，60% 的学生喜欢足球，82% 的学生喜欢游泳，则该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例是 （　　）

A. 62%　　B. 56%　　C. 46%　　D. 42%

【解析】方法一（定理法）：设该中学学生人数为 x，喜欢足球的学生形成集合 A，喜欢游泳的学生形成集合 B，则喜欢足球或游泳的学生形成集合 $A\cup B$，既喜欢足球又喜欢游泳的学生形成集合 $A\cap B$，由 $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$，得 $0.96x=0.6x+0.82x-\mathrm{card}(A\cap B)$，解得 $\mathrm{card}(A\cap B)=0.46x$.

方法二（图示法）：用 Venn 图表示该中学喜欢足球和游泳的学生所占比例之间的关系，如图所示，设既喜欢足球又喜欢游泳的学生占该中学学生总数的比例为 x，则 $(60\%-x)+(82\%-x)+x=96\%$，解得 $x=46\%$.



【答案】C

考法6 集合新定义问题

对于以集合为背景的新定义问题，集合只是一种表述形式，实质上考查的是学生接受新信息、理解新情境、解决新问题的数学能力，解决此类问题，分以下两步：

第一步，正确理解新定义，分析新定义表述的含义，把新定义所表达的数学本质弄清楚，进而转化成熟知的数学问题.

第二步，合理利用集合的相关性质（如元素的性质、集合的运算性质等），在解题时要善于从题设条件给出的数、式中发现可以使用集合相关性质的一些因素，并合理利用集合的交、并、补运算法则解题.

典题例 12 （多选）[黑龙江齐齐哈尔名校 2026 届联考] 设 M,N,P 为非空实数集，定义 $MN=\{z\mid z=xy,x\in M,y\in N\}$，则 （　　）

A. $M\{1\}=M$　　B. $M\{0\}=\{1\}$

C. $MN=NM$　　D. $(MN)P=M(NP)$

【解析】分析：对于 A，B 选项，需要先理解新定义的集合 MN 的含义，即 MN 中的元素为 M 中的元素与 N 中的元素相乘所得.

对于 A，由 MN 的定义知，$M\{1\}=M$ 显然成立，故 A 正确；

对于 B，由 MN 的定义得，$M\{0\}=\{0\}\neq\{1\}$，故 B 错误；

分析：对于 C，D 选项，需要类比乘法交换律、结合律，再结合集合相等的概念判断.

对于 C，设 $x\in M,y\in N$，则 $MN=\{z\mid z=xy,x\in M,y\in N\}$，$NM=\{z\mid z=yx,x\in M,y\in N\}$，所以 $MN=NM$ 成立，故 C 正确；

对于 D，设 $x\in M,y\in N,p\in P$，则 $MN=\{n\mid n=xy,x\in M,y\in N\}$，所以 $(MN)P=\{t\mid t=np=xyp,x\in M,y\in N,p\in P\}$，又 $NP=\{m\mid m=yp,y\in N,p\in P\}$，所以 $M(NP)=\{h\mid h=xm=xyp,x\in M,y\in N,p\in P\}$，所以 $(MN)P=M(NP)$ 成立，故 D 正确.

【答案】ACD

本考点对应练习见《考点精练》P223

考点2 充分条件与必要条件 全称量词与存在量词

考频：5年14考 难度：易

考法对应练 P224

考法1 充分条件与必要条件的判断

1 定义法

$p\Rightarrow q$，且 $q\not\Rightarrow p \Leftrightarrow p$ 是 q 的充分不必要条件；

$p\not\Rightarrow q$，且 $q\Rightarrow p \Leftrightarrow p$ 是 q 的必要不充分条件；

$p\Rightarrow q$，且 $q\Rightarrow p \Leftrightarrow p$ 是 q 的充要条件；

$p\not\Rightarrow q$，且 $q\not\Rightarrow p \Leftrightarrow p$ 是 q 的既不充分也不必要条件.

2 集合法

若两个集合之间存在包含关系，则其对应条件之间也存在特定的充分、必要关系，可以利用集合间的包含关系加以判断，具体情况如下：$P=\{x|p(x)\}$，$Q=\{x|q(x)\}$，

①若 $P\subsetneq Q$，则 p 是 q 的充分不必要条件；

②若 $Q\subsetneq P$，则 p 是 q 的必要不充分条件；

③若 $P=Q$，则 p 是 q 的充要条件（q 也是 p 的充要条件）；

④若 $P\not\subseteq Q$ 且 $Q\not\subseteq P$，则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

点悟 利用集合法时，需记忆“由小范围可推出大范围，而大范围推不出小范围”.

3 辨析

（1）“p 是 q 的充分不必要条件”与“p 成立的一个充分不必要条件是 q”表示不同含义，前者是“$p\Rightarrow q$，且 $q\not\Rightarrow p$”；后者是“$q\Rightarrow p$，且 $p\not\Rightarrow q$”.

（2）注意分清什么是条件，什么是结论，如“p 是 q 的什么条件”中 p 是条件，q 是结论，“p 成立的一个什么条件是 q”中 p 是结论，q 是条件.

真题例1（定义法）[天津2025·2]设 $x\in\mathbf{R}$，“$x=0$”是“$\sin 2x=0$”的 （ ）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【解析】充分性：当 $x=0$ 时，$\sin 2x=\sin 0=0$，故充分性成立；

必要性：当 $\sin 2x=0$ 时，$2x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $x=\frac{k\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$，x 的可能取值为 $0,\pm\frac{\pi}{2},\pm\pi,\cdots$，故必要性不成立. 故选 A.

【答案】A

典题例2（集合法）[湖南长沙雅礼中学2026届阶段检测]已知圆 $O:x^2+y^2=r^2(r>0)$，则“点 $A(1,0)$ 在圆 O 外”是“点 $B(1,1)$ 在圆 O 外”的（ ）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【解析】圆 $O:x^2+y^2=r^2(r>0)$ 的圆心坐标为 $(0,0)$，半径为 r.

点 A 到圆心的距离 $|OA|=1$，若点 $A(1,0)$ 在圆 O 外，则 $0<r<1$；

点 B 到圆心的距离 $|OB|=\sqrt{2}$，若点 $B(1,1)$ 在圆 O 外，则 $0<r<\sqrt{2}$.

因为 $(0,1)\subsetneq(0,\sqrt{2})$，所以“点 $A(1,0)$ 在圆 O 外”是“点 $B(1,1)$ 在圆 O 外”的充分不必要条件.

【提示】小范围可以推出大范围

【答案】A

典题例3（集合法）[江苏常州2025调研]使得“函数 $f(x)=\sqrt{7+2ax-x^2}$ 在区间 $[-1,1]$ 上单调递减”成立的一个充分不必要条件是 （ ）

A. $a\leqslant -1$　　B. $0<a\leqslant 3$

C. $-3<a<-1$　　D. $-3\leqslant a<0$

【解析】令 $t=7+2ax-x^2$，$g(t)=\sqrt{t}\,(t\geqslant 0)$，则由函数 $g(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递减，

600分考点 700分考法

理想树

考点精练

高考数学

2027

以考定练 练透核心考点

精选190+真题，420+模拟题

目录 CONTENTS

正文 答案

第 1 章 集合与常用逻辑用语

考点 1 集合的概念与运算 …… 223 D1

考点 2 充分条件与必要条件 全称量词与存在量词 …… 224 D1

第 2 章 不等式

考点 3 不等式及其性质、一元二次不等式 …… 225 D2

考点 4 基本不等式 …… 226 D4

第 3 章 函数

第 1 节 函数的概念及性质

考点 5-6 函数的概念及其表示 函数的基本性质 …… 227 D5

考点 7-9 基本初等函数 …… 229 D8

▸专题 1 比较大小问题 …… 230 D9

▸专题 2 抽象函数问题 …… 231 D11

第 2 节 函数的应用

考点 10 函数的图象 …… 232 D13

考点 11 函数与方程 …… 233 D14

考点 12 函数模型及其应用 …… 234 D16

第 3 章 风向练 235 D16

第 4 章 导数及其应用

考点 13 导数的运算与几何意义 …… 236 D18

考点 14 利用导数研究函数的单调性、极值、最值 …… 237 D19

▸专题 3 不等式恒成立与存在性问题 … 239 D22

▸专题 4 导数与函数零点问题 …… 240 D23

▸专题 5 构造函数法的应用 …… 241 D25

▸专题 6 极值点偏移 …… 242 D26

正文 答案

▸专题 7 放缩技巧 …… 243 D28

第 4 章 风向练 244 D29

第 5 章 三角函数

考点 15 三角函数的定义、同角三角函数的基本关系、诱导公式 …… 245 D30

考点 16 三角恒等变换 …… 246 D31

考点 17 三角函数的图象与性质 …… 247 D32

▸专题 8 三角函数中 ω 的取值问题 …… 249 D35

第 5 章 风向练 250 D36

第 6 章 平面向量

考点 18 平面向量的线性运算、基本定理及坐标运算 …… 251 D37

考点 19 平面向量的数量积及其应用 …… 252 D38

▸专题 9 平面向量的综合应用 …… 253 D40

第 6 章 风向练 254 D41

第 7 章 解三角形

考点 20 解三角形 …… 255 D42

考点 21 解三角形在实际问题中的应用 …… 257 D45

▸专题 10 解三角形中的最值、范围问题 …… 258 D46

第 7 章 风向练 259 D47

第 8 章 复数

考点 22 复数的概念及运算 …… 260 D48

第 9 章 数列

考点 23 数列的通项公式和性质 …… 261 D49

考点 24 等差数列及其前 n 项和 …… 262 D49

目录 CONTENTS

考点 25　等比数列及其前 n 项和 …… 264 D52

考点 26　数列求通项 …… 266 D53

考点 27　数列求和 …… 268 D55

▸专题 11　数列奇偶项问题 …… 270 D57

▸专题 12　数列与函数、不等式的综合应用 …… 271 D58

▸专题 13　数列新背景、新定义问题 …… 272 D59

第 9 章　风向练　273 D60

第 10 章　立体几何

考点 28　空间几何体的结构特征、表面积与体积 …… 274 D61

考点 29　空间点、线、面的位置关系 …… 275 D62

考点 30　直线、平面的平行与垂直 …… 276 D63

考点 31　空间向量、空间角与空间距离 …… 278 D66

▸专题 14　外接球、内切球、棱切球问题 …… 280 D69

▸专题 15　截面、翻折问题 …… 281 D71

▸专题 16　空间动态问题 …… 282 D72

第 10 章　风向练　284 D76

第 11 章　直线与圆

考点 32　直线与方程、圆的方程 …… 285 D77

考点 33　直线与圆、圆与圆的位置关系 …… 286 D79

第 12 章　圆锥曲线

考点 34　椭圆 …… 287 D81

考点 35　双曲线 …… 289 D83

考点 36　抛物线 …… 291 D86

▸专题 17　曲线与方程 …… 293 D90

▸专题 18　圆锥曲线中的弦长与面积问题 …… 294 D92

▸专题 19　圆锥曲线中的定点、定值、定直线问题 …… 296 D93

▸专题 20　圆锥曲线中的最值、范围问题 …… 298 D95

▸专题 21　圆锥曲线中的特殊题型 …… 299 D96

第 12 章　风向练　302 D99

第 13 章　计数原理

考点 37　两个计数原理 …… 303 D101

考点 38　排列与组合 …… 304 D102

考点 39　二项式定理 …… 305 D103

第 14 章　概率与统计

考点 40　随机事件及古典概型 …… 306 D104

考点 41　相互独立事件的概率、条件概率及全概率公式 …… 307 D105

考点 42　离散型随机变量及其分布列、数学期望与方差 …… 308 D107

考点 43　二项分布、超几何分布与正态分布 …… 310 D108

考点 44　随机抽样与用样本估计总体 … 312 D109

考点 45　成对数据的统计分析 …… 313 D110

▸专题 22　概率统计与其他知识的综合 … 315 D111

第 1 章　集合与常用逻辑用语

考点 1　集合的概念与运算

讲解 P2/答案 D1

考法 1　元素与集合间关系的应用

1. [黑龙江哈尔滨 2025 月考]已知数集 A,B 满足:$A\cap B=\{2,3\}$,$A\cup B=\{1,2,3,4\}$,若 $1\notin A$,则一定有 (　　)

A. $1\in B$　　B. $1\notin B$

C. $4\in B$　　D. $4\notin A$

2. [安徽蚌埠省级示范中学 2026 届联考]已知集合 $P=\{x\mid |x|=-x,x\in\mathbf{Z}\}$,集合 $Q=\complement_{\mathbf{Z}}P$,则下列各选项中属于 Q 的元素是 (　　)

A. -2　　B. -1

C. 0　　D. 1

考法 2　集合与集合间关系的应用

3. [山西大学附中 2026 届诊断]若全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=\{x\mid x<2\}$,$B=\{x\mid x>0\}$,则下列关系正确的是 (　　)

A. $A\subseteq B$　　B. $B\subseteq A$

C. $\complement_U A\subseteq B$　　D. $B\subseteq\complement_U A$

4. [江苏南京 2025 调研]已知集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=4\}$,$B=\{(x,y)\mid y=2\cos x\}$,则 $A\cap B$ 的真子集个数为 (　　)

A. 5　　B. 6

C. 7　　D. 8

考法 3　集合的基本运算

5. [全国新课标Ⅰ2023·1]已知集合 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$,$N=\{x\mid x^2-x-6\geqslant 0\}$,则 $M\cap N=$ (　　)

A. $\{-2,-1,0,1\}$　　B. $\{0,1,2\}$

C. $\{-2\}$　　D. $\{2\}$

6. [全国新课标Ⅰ2024·1]已知集合 $A=\{x\mid -5<x^3<5\}$,$B=\{-3,-1,0,2,3\}$,则 $A\cap B=$ (　　)

A. $\{-1,0\}$　　B. $\{2,3\}$

C. $\{-3,-1,0\}$　　D. $\{-1,0,2\}$

7. [全国甲(理)2022·3]设全集 $U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$,集合 $A=\{-1,2\}$,$B=\{x\mid x^2-4x+3=0\}$,则 $\complement_U(A\cup B)=$ (　　)

A. $\{1,3\}$　　B. $\{0,3\}$

C. $\{-2,1\}$　　D. $\{-2,0\}$

8. [广西南宁 2026 届摸底]已知集合 $A=\{x\mid x^2-2x\leqslant 0\}$,$B=\{1,2,3,4\}$,则 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=$ (　　)

A. $\{4\}$　　B. $\{3,4\}$

C. $\{2,3,4\}$　　D. $\{1,2,3\}$

9. [湖南长沙雅礼中学 2026 届月考]已知集合 $M=\{x\mid x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{x\mid x=4k+1,k\in\mathbf{Z}\}$,则整数集 $\mathbf{Z}$ 可以表示为 (　　)

A. $M\cup N$　　B. $(\complement_{\mathbf{Z}}M)\cup N$

C. $(\complement_{\mathbf{Z}}N)\cup M$　　D. $(\complement_{\mathbf{Z}}M)\cap(\complement_{\mathbf{Z}}N)$

考法 4　集合中的含参问题

10. [山东青岛 2026 届调研]已知 $A=\{1,2,a^2\}$,$B=\{2,a-1\}$,若 $A\cup B=A$,则实数 $a=$ (　　)

A. -1　　B. 1

C. 2　　D. 3

11. [广东实验中学 2025 月考]已知集合 $A=\{x\mid x<a\}$,$B=\{x\mid -2<x<1\}$,且 $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\mathbf{R}$,则 a 的取值范围是 (　　)

A. $[1,+\infty)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $[-2,1]$　　D. $(-2,+\infty)$

考法 5　容斥原理的应用

12. [重庆巴蜀中学 2025 月考]某班的同学参加语文和数学两个学科的结业水平考试,每科满分为 100 分.已知每个同学都至少有一科成绩在 90 分以上,其中语文成绩在 90 分以上的有 45 人,数学成绩在 90 分以上的有 48 人,这两科成绩均在 90 分以上的有 40 人,则该班共有 (　　)

A. 45 人　　B. 48 人

C. 53 人　　D. 43 人

考法 6　集合新定义问题

13. [安徽名校 2026 届月考]定义集合 A 与 B 的差集为 $A-B=\{x\mid x\in A,\text{且 }x\notin B\}$,已知集合 $P=\{x\mid x^2-3x+2\leqslant 0\}$,$Q=\{x\mid a<x\leqslant a+4\}$,若 $P-Q=\varnothing$,则实数 a 的取值范围是_____.

考点2　充分条件与必要条件 全称量词与存在量词

讲解 P6/答案 D1

考法1　充分条件与必要条件的判断

1. [全国甲(理)2024·9]设向量 $\boldsymbol{a}=(x+1,x)$,$\boldsymbol{b}=(x,2)$,则　(　　)

A. $x=-3$ 是 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的必要条件

B. $x=1+\sqrt{3}$ 是 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ 的必要条件

C. $x=0$ 是 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分条件

D. $x=-1+\sqrt{3}$ 是 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ 的充分条件

2. [全国甲(理)2023·7]设甲:$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$,乙:$\sin\alpha+\cos\beta=0$,则　(　　)

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

3. [全国新课标Ⅰ2023·7]记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,设甲:$\{a_n\}$ 为等差数列;乙:$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列,则　(　　)

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

考法2　根据充分、必要条件求参数的值(范围)

4. [江苏南通一中2025强化训练]若使不等式 $|x-1|<a$ 成立的一个充分条件为 $0<x<4$,则实数 a 的取值范围是　(　　)

A. $[3,+\infty)$　　B. $[1,+\infty)$

C. $(-\infty,3]$　　D. $(-\infty,1]$

5. [湖北部分名校2026届月考]当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时,关于 x 的不等式 $x^2-mx-m+15\leqslant 0$ 有解的一个充分不必要条件是　(　　)

A. $m\in[5,+\infty)$　　B. $m\in[6,+\infty)$

C. $m\in[7,+\infty)$　　D. $m\in(-\infty,8]$

考法3　全称量词命题与存在量词命题的否定

6. 命题"$\forall x\in\mathbf{R},\frac{1}{2}x^2-\sin x>0$"的否定是　(　　)

A. $\exists x\in\mathbf{R},\frac{1}{2}x^2-\sin x<0$

B. $\exists x\in\mathbf{R},\frac{1}{2}x^2-\sin x\leqslant 0$

C. $\forall x\in\mathbf{R},\frac{1}{2}x^2-\sin x\leqslant 0$

D. $\forall x\in\mathbf{R},\frac{1}{2}x^2-\sin x<0$

7. [河南TOP20名校2026届调研]设命题 p:$\exists x\in[0,+\infty)$,$e^x=2x$,则 $\neg p$ 为　(　　)

A. $\forall x\in(0,+\infty)$,$e^x=2x$

B. $\forall x\in[0,+\infty)$,$e^x\neq 2x$

C. $\exists x\in[0,+\infty)$,$e^x\neq 2x$

D. $\exists x\in(0,+\infty)$,$e^x=2x$

考法4　判断全称量词命题与存在量词命题的真假

8. [重庆巴蜀中学2026届开学考]已知命题 p:$\forall x\in\mathbf{R}$,$|x+1|>1$;命题 q:$\exists x>0,\frac{1}{x-1}>1$,则　(　　)

A. p 和 q 都是真命题

B. $\neg p$ 和 q 都是真命题

C. p 和 $\neg q$ 都是真命题

D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

考法5　根据命题的真假求参数的取值范围

9. [江苏扬州中学2025检测]命题"$\exists x\in[1,2]$,$x^2+\ln x-a\leqslant 0$"为假命题,则 a 的取值范围为　(　　)

A. $(-\infty,1)$　　B. $(-\infty,0)$

C. $(-\infty,2+\ln 2)$　　D. $(-\infty,4+\ln 2)$

10. [江西多校2026届联考]若"$\forall x\in(-1,2)$,$ax+3\geqslant 0$"为真命题,则 a 的取值范围为_____.

考点 3　不等式及其性质、一元二次不等式

讲解 P10/答案 D2

考法 1　不等式性质的应用

1. [陕西西安中学 2026 届开学考]下列说法正确的是（　　）

A. 若 $a>b>0$，则 $ac^2>bc^2$

B. 若 $a>b$，则 $a^2>b^2$

C. 若 $a<b<0$，则 $a^2>ab>b^2$

D. 若 $a<b$，则 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

2. [安徽合肥一六八中学 2025 月考]已知实数 a,b,c 满足 $a<b<0<c$，则下列不等式中成立的是（　　）

A. $a+\frac{1}{b}>b+\frac{1}{a}$　　B. $\frac{2a+b}{a+2b}<\frac{a}{b}$

C. $\frac{a}{b-c}<\frac{b}{a-c}$　　D. $ac>bc$

考法 2　一元二次不等式及常见不等式的解法

3. [重庆八中 2026 届开学考]不等式 $\frac{x}{x^2-4}>0$ 的解集是（　　）

A. $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$

B. $(2,+\infty)$

C. $(-2,0)$

D. $(-2,0)\cup(2,+\infty)$

4. [安徽 A10 联盟 2026 届诊断]不等式 $x^2-|x|-6>0$ 的解集为（　　）

A. $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$

B. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

C. $(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$

D. $(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$

5. (多选)[河北邢台 2024 月考]关于 x 的不等式 $(ax-1)(x+2a-2)>0$ 的解集中恰有 4 个整数，则实数 a 的值可以是（　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{2}{3}$

C. $-\frac{3}{4}$　　D. -1

6. (多选)[广东深圳外国语学校 2026 届月考]已知关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $(-2,1)$，则（　　）

A. $a<0$

B. $b=-a$

C. 直线 $ax+y+c=0$ 过定点 $(2,0)$

D. 不等式 $cx^2+a|x|+b<0$ 的解集为 $(-1,1)$

考法 3　一元二次不等式恒成立或有解问题的解法

7. [湖南长沙长郡中学 2025 月考]p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$ax^2+2x+5>0$ 为真命题的一个充分不必要条件是（　　）

A. $a\in\left(-\infty,\frac{1}{5}\right)$　　B. $a\in(1,+\infty)$

C. $a\in\left(-\infty,\frac{1}{5}\right]$　　D. $a\in\left(\frac{1}{5},+\infty\right)$

8. [吉林长春东北师大附中 2026 届摸底]若关于 x 的不等式 $x^2-ax+2>0$ 在区间 $[1,5]$ 上有解，则 a 的取值范围是（　　）

A. $(2\sqrt{2},+\infty)$　　B. $(-\infty,2\sqrt{2})$

C. $(-\infty,3)$　　D. $\left(-\infty,\frac{27}{5}\right)$

9. [湘豫名校 2025 适应性调研]已知关于 x 的不等式 $(x-2a)[x^2-(2a+1)x+1]\geqslant 0$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $\left[-\frac{3}{2},0\right]$　　B. $\left[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right]$

C. $(-\infty,0]$　　D. $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$

10. [江苏盐城七校联盟 2026 届检测]已知关于 x 的不等式 $ax^2+bx+1>0$ 的解集为 $\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x<1\right\}$，若对 $\forall x\in[4,+\infty)$，不等式 $bx^2-mx-2a\geqslant 0$ 恒成立，则实数 m 的最大值为（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 8

11. [天津一中 2026 届月考]已知正实数 a,b 满足对任意实数 x 均有 $a\cos 2x-b\cos x\geqslant -2$，则 $2a+b$ 的最大值为_____.

考点4 基本不等式

讲解 P13/答案 D4

考法1 利用基本不等式求最值

1. [江西多校2026届联考]已知 $a>-1$,则 $4a+\frac{1}{a+1}$ 的最小值为 ( )

A. -2　　B. 0

C. 2　　D. 4

2. [湖北黄冈2025调研]若 $m>0,n>0$,且 $3m+2n-1=0$,则 $\frac{3}{m}+\frac{2}{n}$ 的最小值为 ( )

A. 20　　B. 12

C. 16　　D. 25

3. [河南新乡2026届联考]若 $x>y>1$,且满足 $x+y=4$,则 $\frac{1}{x-y}+\frac{2}{y-1}$ 的最小值是 ( )

A. 6　　B. 18

C. $\frac{9}{2}$　　D. 9

4. (多选)[江苏南京一中2025阶段性测试]已知 $a>0$,$b>0$,$\frac{1}{a}+\frac{3}{b}=1$,则下列说法正确的是 ( )

A. ab 的最小值为 12

B. $a+b$ 的最小值为 $4\sqrt{3}$

C. a^2+b^2 的最小值为 24

D. $\frac{1}{a-1}+\frac{3}{b-3}$ 的最小值为 2

5. [辽宁沈阳东北育才学校2025联考]已知函数 $f(x)=2\,025^x-2\,025^{-x}$,若 $a>0,b>0$,且 $f(a-2)+f(b)=0$,则 $\frac{3}{a+1}+\frac{1}{b+1}$ 的最小值为 ( )

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $2\sqrt{3}$

6. 已知 $a>0,b>0$,则 $\frac{(a+3)^2}{b^2}+\frac{12b^2}{a}$ 的最小值为 ( )

A. 4　　B. 6

C. 12　　D. 24

7. [福建福州一中2026届质量检测]已知 $a>-1,b>0$ 且 $2a+b=2$,则 $\frac{b}{a+1}+\frac{2}{b}$ 的最小值为_____.

考法2 利用基本不等式求参数的取值范围

8. [广西南宁一中2025月考]不等式 $t(\sqrt{x}+\sqrt{y})\leqslant\sqrt{2x+2y}$ 对所有的正实数 x,y 恒成立,则 t 的最大值为 ( )

A. 2　　B. $\sqrt{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D. 1

9. [山东日照实验高级中学2025阶段性考试]已知正数 x,y 满足 $x+y=2$,若 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>m^2+m$ 恒成立,则实数 m 的取值范围为_____.

10. [四川成都树德中学2026届月考]已知 $a,b\in\mathbf{R}_+$,且 $a^2-b^2\leqslant 2b+1$,若不等式 $b^2+ab-mb\geqslant ma-1$ 恒成立,则当实数 m 取得最大值时,a 的值为_____.

考法3 基本不等式的变形

11. [北京2024·9]已知 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 是函数 $y=2^x$ 的图象上两个不同的点,则 ( )

A. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}$

B. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>\frac{x_1+x_2}{2}$

C. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}<x_1+x_2$

D. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>x_1+x_2$

12. [北京2025·6]已知 $a>0,b>0$,则 ( )

A. $a^2+b^2>2ab$　　B. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{1}{ab}$

C. $a+b>\sqrt{ab}$　　D. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leqslant\frac{2}{\sqrt{ab}}$

13. [安徽合肥一六八中学2025月考]设 $a,b,c\in[0,1]$,则 $M=\sqrt{|a-b|}+\sqrt{|b-c|}+3\sqrt{|c-a|}$ 的最大值是_____.

第1章　集合与常用逻辑用语

考点1　集合的概念与运算

1. A　【解析】因为 $A\cup B=\{1,2,3,4\}$，$1\notin A$，所以 $1\in B$.

又 $A\cap B=\{2,3\}$，则可能 $4\in B$ 且 $4\notin A$，也可能 $4\in A$ 且 $4\notin B$，故选 A.

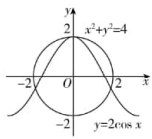
2. D　【解析】由 $|x|=-x$，可得 $x\leqslant 0$，则 $A=\{x\mid |x|=-x,x\in\mathbf{Z}\}=\{x\mid x\leqslant 0,x\in\mathbf{Z}\}$，所以 $Q=\complement_{\mathbf{Z}}P=\mathbf{N}^*$，则 $-2\notin Q$，$-1\notin Q$，$0\notin Q$，$1\in Q$. 故选 D.

3. C　【解析】由题意知 $A\not\subseteq B$，$B\not\subseteq A$，所以 A，B 不正确；

又 $\complement_U A=\{x\mid x\geqslant 2\}$，所以 $\complement_U A$ 为 U 的真子集，所以 C 正确，D 错误. 故选 C.

4. C　【解析】集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=4\}$ 是坐标平面内，以原点为圆心，2为半径的圆上的点的集合，集合 $B=\{(x,y)\mid y=2\cos x\}$ 是坐标平面内，函数 $y=2\cos x$ 图象上的点的集合，在同一坐标系内作出圆 $x^2+y^2=4$ 及函数 $y=2\cos x$ 的部分图象，如图.

【提示】因为两个集合为点集，所以考虑作出图象，交集就是图象交点构成的集合



观察图象知，圆 $x^2+y^2=4$ 与函数 $y=2\cos x$ 的图象有3个公共点，所以 $A\cap B$ 有3个元素，共有 $2^3-1=7$(个)真子集.

【提示】判断出元素个数，再根据公式求真子集个数

5. C　【解析】由 $x^2-x-6\geqslant 0$ 得 $x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 3$，则 $N=\{x\mid x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 3\}$.

$\because M=\{-2,-1,0,1,2\}$，$\therefore M\cap N=\{-2\}$，故选 C.

6. A　【解析】由题意可知 $-1\in B$，$(-1)^3=-1\in A$，$0\in B$，$0^3=0\in A$，所以 $A\cap B=\{-1,0\}$. 故选 A.

一题多解　由题意知 $A=\{x\mid -\sqrt[3]{5}<x<\sqrt[3]{5}\}$，又 $1=\sqrt[3]{1}<\sqrt[3]{5}<\sqrt[3]{8}=2$，所以在 A 中的整数元素为 $-1,0,1$，又 $B=\{-3,-1,0,2,3\}$，则 $A\cap B=\{-1,0\}$，故选 A.

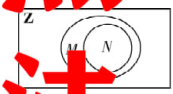
7. D　【解析】因为 $x^2-4x+3=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=3$，所以 $B=\{1,3\}$，

所以 $A\cup B=\{-1,1,2,3\}$，所以 $\complement_U(A\cup B)=\{-2,0\}$，故选 D.

8. B　【解析】依题意，$A=\{x\mid x(x-2)\leqslant 0\}=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}A=\{x\mid x<0$ 或 $x>2\}$，而 $B=\{x\mid x\leqslant 4\}$，所以 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\{3,4\}$. 故选 B.

9. C　【解析】由 $M=\{x\mid x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}=\{\cdots,-3,-1,1,3,5,\cdots\}$，$N=\{x\mid x=4k+1,k\in\mathbf{Z}\}=\{\cdots,-7,-3,1,5,9,\cdots\}$，

可知 N 真包含于 M，M 真包含于 $\mathbf{Z}$，如图，



则 $M\cap N=N\neq\mathbf{Z}$，$(\complement_{\mathbf{Z}}M)\cup N\neq\mathbf{Z}$，$(\complement_{\mathbf{Z}}N)\cup M=\mathbf{Z}$，$(\complement_{\mathbf{Z}}M)\cap(\complement_{\mathbf{Z}}N)\neq\mathbf{Z}$. 故选 C.

10. 【解析】由 $A\cup B=A$ 得 $B\subseteq A$，

根据集合中元素的互异性可得 $a-1\neq 2$，

所以 $a-1=a^2$ 或 $a-1=1$，解得 $a=2$.

此时 $A=\{1,2,4\}$，$B=\{2,1\}$，满足题意.

故选 C.

11. A　【解析】由 $B=\{x\mid -2<x<1\}$ 得 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x\mid x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 1\}$，

而 $A=\{x\mid x<a\}$，$A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\mathbf{R}$，

则 $a\geqslant 1$，所以 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

故选 A.

12. C　【解析】设集合 A 表示语文成绩在90分以上的学生，则集合 A 中有45个元素；

设集合 B 表示数学成绩在90分以上的学生，则集合 B 中有48个元素.

$A\cap B$ 表示两科成绩均在90分以上的学生，则集合 $A\cap B$ 中有40个元素.

$A\cup B$ 表示至少有一科成绩在90分以上的学生，由题意可知 $A\cup B$ 中有 $45+48-40=53$(个)元素.

又因为每个同学都至少有一科成绩在90分以上，所以该班共有53人，故选 C.

13. $[-2,1)$　【解析】由 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)\leqslant 0$，解得 $1\leqslant x\leqslant 2$，即集合 $P=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$.

由差集的定义及 $P-Q=\varnothing$ 知，不存在属于 P 却不属于 Q 的元素，即 $P\subseteq Q$.

所以 $\begin{cases}a+4\geqslant 2,\\ a<1,\end{cases}$ 解得 $-2\leqslant a<1$，即实数 a 的取值范围是 $[-2,1)$.

2027版
600分考点
700分考法
数学
答案解析

考点2　充分条件与必要条件 全称量词与存在量词

1. C　【解析】由题可得 $\boldsymbol{a}=(x+1,x)$，$\boldsymbol{b}=(x,2)$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $(x+1)\cdot x+2x=0$，解得 $x=0$ 或 $x=-3$，故 **A 错误，C 正确**.

$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件为 $2(x+1)=x^2$，即 $x^2-2x-2=0$，解得 $x=1\pm\sqrt{3}$，故 **B，D 错误**. 故选 **C**.

2. B　【解析】由 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$，得 $\sin^2\alpha=1-\sin^2\beta=\cos^2\beta$，所以 $\sin\alpha=\cos\beta$ 或 $\sin\alpha=-\cos\beta$，充分性不成立. 由 $\sin\alpha+\cos\beta=0$，得 $\sin\alpha=-\cos\beta$，即 $\sin^2\alpha=\cos^2\beta$，又 $\cos^2\beta=1-\sin^2\beta$，所以 $\sin^2\alpha=1-\sin^2\beta$，即 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$，必要性成立. 所以“$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$”是“$\sin\alpha+\cos\beta=0$”的必要不充分条件，即甲是乙的必要条件但不是充分条件. **故选 B**.

【易错】注意等式两边开方后会有两种情况

3. C　【解析】充分性：若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，设其公差为 d（常数），则 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，$\therefore\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{n-1}{2}d$，则 $\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\left(a_1+\frac{n}{2}d\right)-\left(a_1+\frac{n-1}{2}d\right)=\frac{d}{2}$（常数），故数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是首项为 a_1，公差为 $\frac{d}{2}$ 的等差数列，充分性成立；

必要性：若数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列，设其公差为 d'（常数），则 $\frac{S_n}{n}=\frac{S_1}{1}+(n-1)d'$，当 $n=1$ 时，$\frac{S_1}{1}=a_1$，$\therefore S_n=na_1+n(n-1)d'$，当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=[na_1+n(n-1)d']-[(n-1)a_1+(n-1)(n-2)\cdot d']=a_1+2(n-1)d'$，当 $n=1$ 时，a_1 符合上式，显然数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1，公差为 $2d'$ 的等差数列，因此必要性成立. 故甲是乙的充要条件. **故选 C**.

一题多解　充分性：若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，设其公差为 d（常数），则 $a_{n+1}-a_n=d$，$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$，故 $\frac{S_n}{n}=\frac{a_1+a_n}{2}$，$\therefore\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{a_1+a_{n+1}}{2}-\frac{a_1+a_n}{2}=\frac{d}{2}$（常数），故数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是首项为 a_1，公差为 $\frac{d}{2}$ 的等差数列，充分性成立；

必要性：若数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列，则 $\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{nS_{n+1}-(n+1)S_n}{n(n+1)}=\frac{na_{n+1}-S_n}{n(n+1)}$ 为常数，设 $\frac{na_{n+1}-S_n}{n(n+1)}=t$（$t$ 为常数），则 $S_n=na_{n+1}-tn(n+1)$，当 $n\geqslant2$ 时，$S_{n-1}=(n-1)a_n-tn(n-1)$，则 $a_n=S_n-S_{n-1}=na_{n+1}-(n-1)a_n-2tn$，整理可得 $a_{n+1}-a_n=2t$，当 $n=1$ 时上式也成立，故数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，必要性成立. 故甲是乙的充要条件. 故选 C.

4. A　【解析】使不等式 $|x-1|<a$ 成立的一个充分条件为 $0<x<4$，

设该不等式的解集为 A，则 $\{x\mid0<x<4\}\subseteq A$.

当 $a\leqslant0$ 时，$A=\varnothing$，不满足要求；

当 $a>0$ 时，$A=\{x\mid1-a<x<1+a\}$，

则 $\begin{cases}1-a\leqslant0,\\1+a\geqslant4,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant3$.

【提示】当 $a=3$ 时，代入验证，符合题意

故选 A.

5. C　【解析】当 $1\leqslant x\leqslant4$ 时，若关于 x 的不等式 $x^2-mx-m+15\leqslant0$ 有解，则 $m\geqslant\frac{x^2+15}{x+1}$ 在 $1\leqslant x\leqslant4$ 上有解.

【提示】参变量分离，避免对二次函数零点分布情况的复杂讨论

令 $t=x+1$，$\frac{x^2+15}{x+1}=\frac{(t-1)^2+15}{t}=t+\frac{16}{t}-2$，

则 $m\geqslant t+\frac{16}{t}-2$ 在 $2\leqslant t\leqslant5$ 上有解.

因为 $t+\frac{16}{t}-2\geqslant2\sqrt{t\cdot\frac{16}{t}}-2=6$，当且仅当 $t=\frac{16}{t}$，即 $t=4$ 时取等号.

所以当 $1\leqslant x\leqslant4$ 时，关于 x 的不等式 $x^2-mx-m+15\leqslant0$ 有解的充要条件是 $m\geqslant6$，故满足题意的充分不必要条件中 m 的取值范围是 $[6,+\infty)$ 的真子集，选项中只有 C 符合，**故选 C**.

6. B　【解析】命题“$\forall x\in\mathbf{R},\frac{1}{2}x^2-\sin x>0$”的否定是“$\exists x\in\mathbf{R},\frac{1}{2}x^2-\sin x\leqslant0$”. **故选 B**.

7. B　【解析】命题 p：$\exists x\in[0,+\infty)$，$e^x=2x$ 的否定 $\neg p$：$\forall x\in[0,+\infty)$，$e^x\neq2x$. **故选 B**.