浙大数学优辅

本书荣获高效能品牌图书TOP榜“专题专项类”金奖

高中数学新体系（修订版）

概率统计的秘密

彭海燕　张珅瑞　编著

结合近十年全国卷的命题理念

揭示高考中概率统计的命题手法

厘清概率统计中的一些概念盲区

把握问题解决的一般规律和思维方式

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

序　言

我们正身处由数据驱动、智能赋能的新时代. 人工智能不仅改变着我们理解世界的方式，也重塑着数学学习的意义与路径. 在这一背景下，概率与统计已不再仅仅是数学的一个主题，而是理解智能系统、参与未来创造的基础语言与核心思维.

新高考改革与教育改革发展导向同步，命题更注重在贴近技术演进与真实场景中，考查考生是否具备适应智能时代所需的数据素养、模型构建能力与算法思维. 高考概率统计试题的演变，清晰体现出从“知识立意”向“素养立意”的转型：

从计算到建模　强调在实际情境中识别问题、建立概率模型或统计模型，并进行合理的参数估计与假设检验；

从结果到过程　注重对数据分析流程的理解与表达能力，包括数据收集、清理、探索性分析与推断；

从学科到融合　试题常渗透机器学习、风险评估、社会调查等多学科背景，要求考生具备跨情境的数学迁移能力.

为帮助你真正建立适应人工智能时代的数学学习方式，本书以“学会学习、学会研究、学会解决问题”为主线，系统构建以下学习体系：

以“学会学习”应对不确定性　分析概率统计的核心概念框架与思想演进，帮助你形成结构化、可迁移的知识体系，奠定持续学习的基础；

以“学会研究”理解人工智能　通过贴近人工智能与数据科学的研究案例，引导你体验“问题定义→模型选择→算法理解→结果评价”的全过程，培养严谨的探究习惯；

以“学会解决问题”连接未来　结合推荐系统、预测模型、分类算法等真实技术背景，训练你在开放、动态环境中运用概率统计进行决策与优化的能力，实现从解题到解决真实问题的跨越.

在“三新”的教学实践下，本书内容持续更新，紧跟高考改革与学科前沿，不仅为高考备考设计，更致力于培养你在人工智能时代赖以发展的数据思维、模型意识与随机洞察力. 我们期望与你同行，不仅学会数学，更学会如何用数学来理解并参与这个正在被人工智能重新定义的世界.

欢迎加入“高中数学新体系”交流群(QQ:821526438)，一起探索数学与未来之间的深刻联结.

彭海燕(正高、特级教师)

目录 Contents

导引：面向新时代的概率统计学习 …… 1

第一章　数学思维与计数原理 …… 2

1.1　从生活问题到数学模型：加法原理与乘法原理 …… 3

1.2　递推与建模：数列思想在计数中的应用 …… 9

1.3　二项式定理：展开、系数与概率背景 …… 13

研究视角：计数问题在新高考中的呈现方式与思维突破 …… 22

第二章　概率：理解随机性，建立模型观 …… 24

2.1　什么是概率：从直觉到数学定义 …… 25

2.1.1　从生活直觉到数学抽象 …… 25

2.1.2　数学思维路径：从具体到抽象，从直觉到严谨 …… 25

2.1.3　学会研究：概率定义的历史脉络与思想演进 …… 25

2.1.4　学会解决问题：概率思维在真实场景中的体现 …… 27

2.2　随机事件与概率模型 …… 29

2.2.1　古典概型与几何概型：两类基本概率模型 …… 29

2.2.2　事件的关系与运算：用集合语言刻画随机现象 …… 36

2.2.3　条件概率与独立性：动态环境中的推理工具 …… 43

2.2.4　全概率公式与贝叶斯推断：从因到果与由果溯因 …… 53

2.3　随机变量及其数字特征 …… 59

2.3.1　离散型与连续型随机变量：从事件思维到函数思维 …… 59

2.3.2　期望与方差：刻画中心与波动 …… 73

2.4　重要的概率分布 …… 86

2.4.1　二项分布：独立重复试验的模型 …… 86

2.4.2　正态分布：大自然与社会现象的通用语言 …… 100

2.5　概率建模与实践：概率在决策与预测中的应用 …… 112

目录

Contents

第三章　统计：从数据收集到推断决策 …… 125
3.1　统计研究的基本路径：从问题到结论 …… 126
3.2　如何获取数据：调查设计与抽样方法 …… 128
3.2.1　随机抽样：保证代表性的关键 …… 128
3.3　数据处理与可视化 …… 137
3.4　统计推断：用样本认识总体 …… 150
3.4.1　假设检验：基于数据的决策 …… 150
3.4.2　相关分析与一元线性回归 …… 157
3.4.3　独立性检验：定性变量的关联分析 …… 170
研究视角：新高考中统计试题的信息整合与结论表达 …… 182
第四章　建模与应用：概率统计的综合运用 …… 185
4.1　函数模型与分布拟合 …… 186
4.2　数列与递推在随机过程建模中的应用 …… 204
4.3　跨学科应用专题 …… 221
研究视角：应对高考中的建模题与创新题 …… 225
参考答案 …… 228
后　记 …… 281

导　引

面向新时代的概率统计学习

一、概率统计在智能时代的价值

你可能每天都在接触“概率”与“统计”，却未必意识到它们的无处不在. 从天气预报中的降水概率，到社交媒体的推荐算法；从考试中的选项分布，到社会调查中的数据分析. 在人工智能与大数据日益影响生活的今天，概率统计已不再是抽象的理论，而是理解现实、参与未来的“数学语言”. 它帮助我们理性看待不确定性，学会从数据中发现规律，培养一种面向未来的思维习惯——这正是人工智能时代学习者应具备的核心素养.

二、新高考怎么考：素养导向与命题特点

新高考中的概率统计试题，已不再是简单的公式计算或者一个具体的概率模型. 它们往往以更加真实、更加综合，甚至是跨学科的情境呈现——可能是一则社会调查、一个科学实验，甚至是一个算法流程图. 命题注重考查你是否能“理解情境，提取数学结构”“建立合适的概率模型或统计模型”“进行分析、推断并解释结果”. 这意味着单纯依靠刷题已然不够，你必须真正理解概念、掌握思想、学会建模. 这也正是本书写作时贯穿始终的线索.

三、如何使用本书：从“学会”到“会学”

本书以“学会学习、学会研究、学会解决问题”为目标，在每一章都设计了清晰的学习路径：从理解开始，每节以问题或情境引入，帮助你建立直观感受；到模型建构，系统讲解典型概率模型与统计方法，强调“为什么这样建模”；再走向应用，通过高考真题与拓展情境，训练综合运用与表达的能力. 建议你不仅阅读正文，更要动手实践、思考“研究视角”中的问题，参与章节后的建模任务. 只有当你从“被动接受”转向“主动探究”，才能真正掌握概率统计的思想，并让这份能力与素养在高考与未来中持续发光.

愿这本书陪伴你，走上一段有意义的学习旅程.

第一章

数学思维与计数原理

计数是离散数学的基石，更是对现实问题进行数学建模的核心支柱.从分类与分步的朴素原理入手，再到递推、二项式定理的层层深入，我们学到的不只是计数的工具和方法，更是在构建一种“从具体情境中提炼数学结构”的思维模式.

1.1　从生活问题到数学模型：加法原理与乘法原理

学会学习：从生活经验到数学抽象

【问题引入】学校食堂今日菜单：主食有米饭、面条；菜品有红烧肉、清蒸鱼、炒青菜等. 若你需要选一种主食和一种菜品，共有多少种不同的组合方式？若你只打算选一种主食或一种菜品（无须同时选择两类），又有多少种选择？

这个生活中的问题，蕴含着两类最基本的计数思想：当需要**同时完成多个选择**（既要选主食，又要选菜品）时，适用**乘法原理**；当只需**完成其中一类选择**（选主食或菜品）时，适用**加法原理**.

【基本概念】

分类加法计数原理	完成一件事有 n 类不同的方案，完成第 i 类方案有 m_i 种不同的方法，那么完成这件事共有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法.
分步乘法计数原理	完成一件事有 n 个步骤，完成第 i 步有 m_i 种不同的方法，那么完成这件事共有 $m_1m_2\cdots m_n$ 种不同的方法.

【关键辨析】

加法原理：关注“分类”，各类方案之间是“或”的关系，互不干扰.

乘法原理：关注“分步”，各步骤之间是“且”的关系，步步相连.

学会研究：原理的深化与模型的识别

研究焦点 1　**如何判断使用加法还是乘法？**

判断的核心是分析“完成这件事”的逻辑结构.

(1) 分析事件终点：明确“一件事”完成的标准是什么？

(2) 识别结构关系：完成这件事的不同方式是互斥分类（加法）还是连续步骤（乘法）？

(3) 检查独立性：对于乘法原理，要确保完成每一步的方法数不受前几步选择的影响.

研究焦点 2　**计数中的“特殊优先”策略.**

在复杂计数中，常常需要优先处理特殊元素或特殊位置，这在本质上是运用加法原理进行分类.

研究焦点 3　**排列与组合的深入理解.**

排列	从 n 个不同元素中取出 $m(n\geqslant m)$ 个元素，并按照一定的顺序排成一列，叫作排列. 其中，所有不同排列的个数叫作排列数，记为 $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$
组合	从 n 个不同元素中取出 $m(n\geqslant m)$ 个元素作为一组，叫作组合. 其中，所有不同组合的个数叫作组合数，记为 $C_n^m=\dfrac{A_n^m}{m!}=\dfrac{n!}{(n-m)!m!}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$

【辨析】

定义	排列	组合
定义的共同点	从 n 个不同的元素中不重复地（不放回地）取出 m 个元素	
定义的区别	需要考虑取出的 m 个元素的顺序	不必考虑取出的 m 个元素的顺序
联系	排列可以分为“先组合，再对组内元素全排列”两个步骤	

例如，求从 4 个不同元素 1,2,3,4 中取出 3 个元素的排列数 A_4^3 和组合数 C_4^3.

组合	排列
1,2,3	123,132,213,231,312,321
1,2,4	124,142,214,241,412,421
1,3,4	134,143,314,341,413,431
2,3,4	234,243,324,342,423,432

【发现】“从 n 个不同元素中取出 m 个元素进行排列”这件事，可以分解成以下两个步骤：

第一步，从 n 个不同元素中取出 m 个元素，共有 C_n^m 种方法；

第二步，将每一个组合中的 m 个元素进行全排列，共有 A_m^m 种方法.

根据分步乘法原理，我们可以得到 $A_n^m=C_n^mA_m^m$，因此我们得到组合数公式

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{m!}.$$

公式 $A_n^m=C_n^mA_m^m$ 的等号两边是对同一个问题作出的两个等价解释. 实际上，这里用到的方法是将一个量用两种方法各算一次，由结果相同得到等式，这是一种非常有用的思想方法，叫作“算两次”. 对此我们并不陌生，如列方程的本质就是从两个不同的侧面列出表示同一个量的代数式；几何中常用的等面积法、等体积法也是“算两次”的典范.

另外，注意到除法是乘法的逆运算，除以 $A_m^m=m!$ 这一操作相当于除去了 m 个元素的顺序，即将 m 个“有序”的元素化为 m 个“无序”的元素.

【延伸】**（1）不全相异元素的排列（多组组合）**：n_1 个 x_1，n_2 个 x_2，…，n_k 个 x_k，共 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$ 个元素的全排列的个数为 $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$.

方法一：先把这 n 个元素看作是互异的，它们的全排列有 $n!$ 个，除去 n_1 个 x_1 的顺序 $n_1!$，n_2 个 x_2 的顺序 $n_2!$，…，n_k 个 x_k 的顺序 $n_k!$，即得 $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$.

方法二：将 n_1 个 x_1，n_2 个 x_2，…，n_k 个 x_k 进行全排列，可以分 k 步来完成：第 1 步，从 n 个位置中选出 n_1 个放置 x_1，有 $C_n^{n_1}=\dfrac{n!}{n_1!(n-n_1)!}$ 种选法；第 2 步，从剩下的 $n-n_1$ 个位置中选出 n_2 个放置 x_2，有 $C_{n-n_1}^{n_2}=\dfrac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}$ 种选法；… 第 k 步，最后剩下的 k 个位置全部放置 x_k，有 $C_{n_k}^{n_k}=1$ 种选法. 由乘法原理，这 n 个元素的全排列的个数为

$$C_n^{n_1}C_{n-n_1}^{n_2}\cdots C_{n_k}^{n_k}=\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdot\cdots\cdot\frac{n_k!}{n_2!}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

(2) 可重复元素的排列：从 n 个不同的元素中可重复地(有放回地) 取出 m 个元素排成一列，所有不同排列的个数为 n^m.

证明：可以分 m 步来完成：第 1 步，决定第 1 个位置上放置哪个元素，有 n 种选法；第 2 步，决定第 2 个位置上放置哪个元素，有 n 种选法；… 第 m 步，决定第 m 个位置上放置哪个元素，有 n 种选法. 由乘法原理，这 m 个元素的全排列的个数为 n^m.

(3) 可重复元素的排列：从 n 个不同的元素中可重复地(有放回地) 取出 m 个元素合成一组，所有不同组合的个数为 C_{n+m-1}^m.

证明：从 n 个不同的元素 a_1，a_2，…，a_n 中可重复地(有放回地) 取出 m 个，设其中有 x_1 个 a_1，x_2 个 a_2，…，x_n 个 a_n，则 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$；反之，方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ 的每一个解 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 都对应着 a_1，a_2，…，a_n 的一个可重复的组合. 而方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ 的解的个数，就是 m 个 1 和 $n-1$ 个“+”号的排列的个数，即 C_{n+m-1}^m. 例如，从 3 个不同的元素 a，b，c 中可重复地(有放回地) 取出 2 个合成一组，所有不同的组合(共 $C_{3+2-1}^2=6$ 个) 列举如下：

a,b,c 的可重复组合	方程 $x_1+x_2+x_3=2$ 的解	2 个 1 和 2 个“+”号的排列
aa	$(2,0,0)$	$11++$
ab	$(1,1,0)$	$1+1+$
ac	$(1,0,1)$	$1++1$
bb	$(0,2,0)$	$+11+$
bc	$(0,1,1)$	$+1+1$
cc	$(0,0,2)$	$++11$

【高考导向分析】

新高考强调在真实情境中识别计数模型. 近年来的常见计数模型如下.

现实问题	数学问题	原理方法
行程规划问题	路径计数	分步乘法
资格筛选问题	多条件均满足	分类讨论
资源配置问题	多物品分配	乘法原理与排列组合

学会解决问题：典型例题与思维建模

例题 1 从 1,3,5,7,9 中任取 2 个数字，从 0,2,4,6 中任取 2 个数字，一共可以组成_____个没有重复数字的四位数.（用数字作答）

【分析】 建模识别：这是“先选取，后排列”的两步过程，但 0 不能作千位是约束条件；策略选择：按是否含 0 分为两类（分类加法原理）.

【解析】 从 1,3,5,7,9 中任取 2 个数字，有 C_5^2 种方法. 从 0,2,4,6 中任取 2 个数字，则需要考虑是否取到 0.

第一类，从 0,2,4,6 中任取 2 个数字没有取到 0，即从 2,4,6 中任取 2 个数字，有 C_3^2 种方法，这样取出的 4 个数字组成四位数的个数为 $C_5^2C_3^2A_4^4 = 720$.

第二类，从 0,2,4,6 中任取 2 个数字取到了 0，即从 2,4,6 中还需取 1 个数字，有 C_3^1 种方法；当含有 0 的 4 个数排成四位数时，先在个位、十位、百位三个位置中选一个排数字 0，有 C_3^1 种方法，其余 3 个数字则全排列. 这样可以组成的四位数的个数为 $C_5^2C_3^1C_3^1A_3^3 = 540$.

综上，一共可以组成的没有重复数字的四位数的个数为 $720 + 540 = 1260$.

答案为 1260.

【思维升华】 此题展示了“先分类，再分步”的复合计数思想. 特殊元素（0）的处理是关键，体现了“正难则反”的逆向思维：也可用全部排列减去 0 在千位的排列.

【方法体系构建】

方法	适用场景	关键要点
直接分类法	有明显互斥的类别	确保类别完整且互斥
分步乘法	有清晰的操作步骤	确保步骤独立且完整
特殊优先法	有特殊限制条件	优先处理特殊元素 / 位置
正难则反法	直接计算复杂时	用总数减去反面情况
捆绑法	元素必须相邻	将相邻元素视为一个整体
插空法	元素不能相邻	先排其他元素，再将不相邻元素插入空位

基于以上认识，例题 1 解析的第二类中含有 0 的四位数个数的计算过程就用到了特殊优先法，因为数字 0 是一个特殊元素，它不能在千位这个特殊的位置上. 除了这种方式，还可以采取其他的计算方式.

正难则反法： $C_5^2C_3^1(A_4^4 - A_3^3) = 540$. 先直接把 4 个数字全排列，再减去 0 在千位上其余 3 个数字的全排列，即 $A_4^4 - A_3^3$.

另外，对比原解析中的式子 $C_5^2C_3^1C_3^1A_3^3 = 540$，我们发现 $A_4^4 - A_3^3 = C_3^1A_3^3$. 事实上，这是排列数恒等式 $A_{n+1}^{n+1} - A_n^n = nA_n^n$ 在 $n = 3$ 时的情况.

插空法：$C_5^2C_3^1A_3^3C_3^1=540$. 先把 3 个非零数字全排列，3 个数字内有 2 个间隙，再将 0 插入 2 个间隙或右端这三个位置中的一个位置，即 $A_3^3C_3^1$.

【变式】若要求组成的四位数是偶数，则有多少个？

【解析】偶数的个位必须是偶数. 我们以是否含 0 以及 0 是否在个位上进行分类：

第一类，不含 0 的偶数. 个位从 2，4，6 中选一个，有 C_3^1 种；从 5 个奇数中选 2 个，有 C_5^2 种；从剩下 2 个非 0 偶数中选 1 个，有 C_2^1 种；将选出的 4 个数字排列，个位已定，剩余 3 位全排列，有 3! 种. 这样就有 $C_3^1C_5^2C_2^1\times3!=3\times10\times2\times6=360$.

第二类，含 0 的偶数.

①0 在个位上，个位固定为 0. 选两个奇数，有 C_5^2 种；选一个非 0 偶数，有 C_3^1 种；剩余 3 位全排列，有 3!种. 这样就有 $C_5^2C_3^1\times3!=10\times3\times6=180$.

②0 不在个位，个位从 2，4，6 中选，有 C_3^1 种；0 必须在百位或十位，则有 C_2^1 种；选两个奇数，有 C_5^2 种；剩余两个奇数排列，有 2!种. 这样就有 $C_3^1C_2^1C_5^2\times2!=3\times2\times10\times2=120$.

合并两类，得 $180+120=300$.

综上，四位数是偶数的个数为 $360+300=660$.

例题 2　（生活情境建模）：某城市地铁系统有 5 条线路，其中 3 条为东西走向，2 条为南北走向. 某人从城西到城东，必须先乘东西走向线路，再换乘一次（可同向可反向），有多少种不同的乘车方案？

【建模解析】第一步，选择第一条东西走向线路，有 3 种选择；第二步，选择换乘后的线路（可以是剩下 2 条东西走向线路或 2 条南北走向线路），有 4 种选择. 共计有 $3\times4=12$ 种乘车方案.

【误区警示】注意“从城西到城东”意味着不能原线返回，这与“任意换乘”不同，体现了审题的重要性.

【变式】如果允许不换乘（即可以乘坐一条东西走向线路直达），但最多换乘一次，有多少种方案？

【解析】此时可以分两类，直达或者换乘一次.

直达，可以选择一条东西走向线路，有 3 种；换乘一次，则同上，有 12 种.

所以共计 15 种.

拓展研究题

1. 用九种颜色给一个正四面体涂色，使相邻两个面的颜色不同，则有_____种涂色情况.（若两种涂色方法可以通过旋转使得每个面的颜色一一对应，则算作一种涂色方法）

2. 用数字1,2,3,4,5,6,7,8,9组成没有重复数字，且至多有一个数字是偶数的四位数，这样的四位数一共有_____个.（用数字作答）

3. A,B,C,D,E,F六名同学进行劳动技术比赛，决出第1名到第6名的名次.A,B,C去询问成绩，回答者说："很遗憾，你们三个都没有得到冠军."对B说："你的名次在C之前."对C说："你不是最后一名."从以上的回答分析，这六名同学的名次排列情况共有（　　）.

A. 108种　　B. 120种　　C. 144种　　D. 156种

4. 将A,B,C,D,E,F六个字母排成一排，且A,B均在C的同侧，则不同的排法共有_____种.（用数字作答）

5. 回文数是指从左向右读与从右向左读都一样的正整数.如22,121,3443,94249等.显然，两位数中的回文数有9个，即11,22,33,…,99；三位数中的回文数有90个，即101,111,121,…,191,202,…,999.

（Ⅰ）四位数中的回文数有_____个.

（Ⅱ）$2n+1(n\in\mathbf{N}^*)$位数中的回文数有_____个.

6. 15个人围坐在圆桌旁，从中选出4个人，使得其中任意2个人都不相邻的选法数为_____.

7. 每个正整数都可以唯一地表示成形式：$\sum\limits_{i=1}^{2k+1}(-1)^{i-1}2^{a_i}=2^{a_1}-2^{a_2}+\cdots+2^{a_{2k-1}}-2^{a_{2k}}+2^{a_{2k+1}}$，其中$a_1<a_2<\cdots<a_{2k}<a_{2k+1},a_i\in\mathbf{N}(1\leqslant i\leqslant 2k+1)$且$k$为该正整数的"长度"，例如$5=2^0+2^2=2^0-2^2+2^3,7=2^0+2^1+2^2=2^0-2^1+2^2-2^0+2^3=2^0-2^1+2^3$.若正整数$n(1\leqslant n\leqslant 1024)$的"长度"为1，则这样的$n$的个数为（　　）.

A. C_9^3　　B. C_{10}^3　　C. C_{11}^3　　D. C_{12}^3

8.（多选题）设平面中有$n(n\geqslant 3,n\in\mathbf{Z})$个不同的点，且任意三个点均不共线.从某点开始与其他点连线（连线均为线段），笔不能离开纸面，也不能与任何一条线段重合（可以重复经过线段上的一个点），最后到达某个点结束，这个图形为一个"通路".在"通路"中，若起点和终点重合了，则这个图形为一个"回路".对于下列三个图形，结论正确的有（　　）.

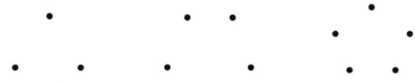


图1　　图2　　图3

A. 在图1中，可以绘制7个不同的"通路"

B. 在图2中，可以绘制18个仅由3条线段组成的不同的"通路"

C. 在图2中，可以绘制7个不同的"回路"

D. 在图3中，可以绘制37个至多由5条线段组成的不同的"回路"

1.2　递推与建模：数列思想在计数中的应用

学会学习：从具体实例到递推思想

【问题引入】假设你要爬一个有 10 级的台阶，每次可以跨 1 级或 2 级. 有多少种不同的登顶方式？如果直接列出所有可能组合，会非常烦琐. 可以发现：到达第 10 级台阶的方式，要么从第 9 级跨 1 步上来，要么从第 8 级跨 2 步上来. 如果设到达第 n 级台阶的方式数为 a_n，那么就有 $a_{10}=a_9+a_8$. 这就是递推思想——通过已知的小规模问题的解，逐步推导出大规模问题的解.

【基本概念】

计数问题中递推关系的本质：将一个问题规模为 n 的计数问题 P_n，与其规模较小的子问题 P_{n-1}，P_{n-2}，… 联系起来. 这种联系通常表现为一个等式关系，称为递推关系.

建立递推关系的关键步骤：

1. 定义状态：设 a_n 表示规模为 n 的问题的解；
2. 寻找分解：将规模 n 的问题分解为规模更小的同类问题；
3. 建立联系：用 a_{n-1}，a_{n-2}，… 表示 a_n；
4. 确定初值：给出最小规模问题的解（如 a_1，a_2 等）.

学会解决问题：典型例题与思维建模

1. 斐波那契数列与爬台阶问题.

例题 1　现要上 10 级台阶，每次可以上 1 级或 2 级，则不同的方法共有（　　）.

A. 123 种　　B. 89 种　　C. 55 种　　D. 21 种

【分析】本题中的方法可以看作是 x 个 1 和 y 个 2 的排列，其中 $x,y\in\mathbf{N}$ 且 $x+2y=10$，(x,y) 的取值分 $(10,0),(8,1),(6,2),(4,3),(2,4),(0,5)$ 这六类. 不过，随着问题规模的增大，比如“上 10 级台阶”变成“上 20 级台阶”“上 30 级台阶”，这种分类计算的方式会越来越烦琐，甚至难以操作. 事实上，我们还可以考虑将问题一般化，即求“上 n 级台阶”的不同方法 a_n.

【解析】**方法一**：按上 2 级台阶的次数来分类：

含 0 次 2 级、10 次 1 级的方法有 $C_{10}^0=1$ 种；

含 1 次 2 级、8 次 1 级的方法有 $C_9^1=9$ 种；

含 2 次 2 级、6 次 1 级的方法有 $C_8^2=28$ 种；

含 3 次 2 级、4 次 1 级的方法有 $C_7^3=35$ 种；

含 4 次 2 级、2 次 1 级的方法有 $C_6^4=15$ 种；

含 5 次 2 级、0 次 1 级的方法有 $C_5^5=1$ 种.

综上，不同的方法共有 $C_{10}^0 + C_9^1 + C_8^2 + C_7^3 + C_6^4 + C_5^5 = 89$ 种.

方法二：一般化，设要上 n 级台阶，每次可以上 1 级或 2 级，有 a_n 种不同的方法. 在这 a_n 种方法中，有 a_{n-1} 种是从第 $n-1$ 级上 1 级到达的，还有 a_{n-2} 种是从第 $n-2$ 级上 2 级到达的，即

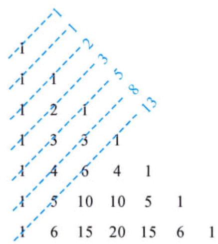
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

另外，易知 $a_1 = 1, a_2 = 2$，所以 $a_3 = 3, a_4 = 5, a_5 = 8, a_6 = 13, a_7 = 21, a_8 = 34, a_9 = 55, a_{10} = 89$，故选 B.

【拓展研究】本题中的 a_n 就是斐波那契数列 $\{F_n\}$ 的第 $n+1$ 项 F_{n+1}. 综合方法一和方法二，我们得到一个有趣的结果：

$$F_{n+1} = C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \cdots + C_{n-[n/2]}^{[n/2]}.$$

这一结果的直观表示是：在杨辉三角中，第 n 个"斜行"上的各数之和就是 F_n，如下图：

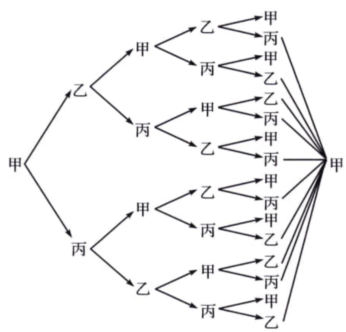


2. 传球问题与状态转移.

例题 2 三个人踢毽子，互相传递，每人每次只能踢一下，由甲开始踢，经过 5 次传递后，毽子又被踢回给甲，则不同的传递方式共有（　　）.

A. 6 种　　B. 8 种　　C. 10 种　　D. 16 种

【分析】由于问题的"规模"不大（只有 3 个人，且只进行 5 次传递），可以考虑用树状图枚举前 4 次传递中所有的传递方式（因为第 5 次传递要求踢回给甲），共 $2^4 = 16$ 种，如下图：



其中球在甲处的传递方式有 6 种，这 6 种传递方式无法经过下一次传递时踢回给甲，而其

余 10 种传递方式均可以在下一次传递时踢回给甲. 经过上述分析，我们已经接近问题的本质了，可以对这个问题进行一般化处理.

【解析】一般化，设 n 次传递后，毽子又被踢回给甲的传递方式有 a_n 种，则 $a_1 = 0$. 若先不考虑 n 次传递后毽子又被踢回给甲，则由于拿到毽子的人有 2 种传法，所以前 $n-1$ 次传递有 2^{n-1} 种传法，其中有 a_{n-1} 种传法毽子被踢回给甲，这 a_{n-1} 种传法不能在第 $n-1$ 次传递时踢回给甲，而其他传法均可以踢回给甲. 因此，

$$a_n = 2^{n-1} - a_{n-1}.$$

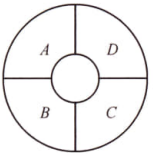
递推运算，得 $a_2 = 2, a_3 = 2, a_4 = 6, a_5 = 10$，故选 C.

拓展研究题

1. 空间中的 n 个平面最多可以把空间划分成_____个部分.

2. 平面内的 n 个圆，最多可以把这个平面划分成_____个部分.

3. 如图，一环形花坛包含 A, B, C, D 四块，现有 4 种不同的花供选种，要求在每块里种 1 种花，且相邻的 2 块种不同的花，则不同的种法总数为(　　).



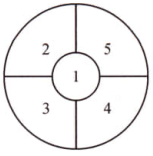
第 3 题图

A. 96 种　　B. 84 种

C. 60 种　　D. 48 种

4. 如图，在一个正六边形的六个区域栽种观赏植物，要求同一块中种同一种植物，相邻的两块种不同的植物. 现有 4 种不同的植物可供选择，则有_____种栽种方案.

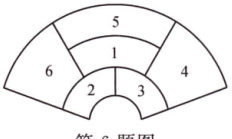

第 4 题图



第 5 题图

5. 如图，一个地区分为 5 个行政区域，现给地图着色，要求相邻区域不得使用同一种颜色，现有 4 种颜色可供选择，则不同的着色方法共有_____种.(用数字作答)

6. 某地在中心广场建造一个花圃，花圃分为 6 个部分(如图). 现要栽种 4 种不同颜色的花，每部分栽种一种且相邻部分不能栽种同种颜色的花，则不同的栽种方法有_____种.(用数字作答)



第 6 题图

7. 如果：(1)a,b,c,d 都属于$\{1,2,3,4\}$；(2)$a\neq b,b\neq c,c\neq d,d\neq a$；(3)$a$ 是a,b,c,d 中的最小值. 那么，可以组成的不同的四位数$\overline{abcd}$ 的个数是_____.

8. 将字母 a,a,b,b,c,c 排成两行三列，要求每行的字母互不相同，每列的字母也互不相同，则不同的排列方法共有(　　).

A. 12 种　　B. 18 种　　C. 24 种　　D. 36 种

9. 将 1,2,3 填入 3×3 的方格中，要求每行、每列都没有重复数字，下面是一种填法，则不同的填写方法共有(　　).

1	2	3
3	1	2
2	3	1

第 9 题图

A. 6 种　　B. 12 种　　C. 24 种　　D. 48 种

10. 在一个铁路系统中，有两条平行的无限轨道 A 和 B. 从起点开始，每隔单位距离就有一个车站，依次编号为 1,2,3,…. 一列火车从 0 号车站(车库) 出发，可以选择进入 A 轨道的 1 号站，或 B 轨道的 1 号站. 对于任意车站 $k(k\geqslant 1)$：

若列车在 A 轨道的 k 号站，则它有 2 种方式到达 A 轨道的 $k+1$ 号站，有 1 种方式换轨到达 B 轨道的 $k+1$ 号站.

若列车在 B 轨道的 k 号站，则它有 2 种方式到达 A 轨道的 $k+1$ 号站，有 3 种方式换轨到达 B 轨道的 $k+1$ 号站.

令 a_n 表示列车到达 A 轨道 n 号站的所有不同调度方案数，b_n 表示列车到达 B 轨道 n 号站的所有不同调度方案数.

(Ⅰ) 已知 $a_1=1,b_1=1$，求 a_2,b_2 以及 a_3,b_3 的值.

(Ⅱ) 试建立一个关于数列$\{a_n\}$ 和$\{b_n\}$ 的线性递推关系组.

1.3　二项式定理：展开、系数与概率背景

学会学习：从计数原理到二项展开

【问题引入】想象你正在参加一个抽奖游戏：连续抛掷一枚硬币 5 次，每次抛掷结果相互独立，正面朝上的概率为 p. 你想要知道恰好出现 3 次正面的概率是多少. 要解决这个问题，你需要知道：在 5 次抛掷的所有可能结果中，有多少种方式恰好出现 3 次正面？这正是二项式系数的应用. 而将 $(p+q)^5$ 展开时，p^3q^2 项的系数正好就是这个计数问题. 这就是二项式定理与概率之间的深刻联系.

【基本概念】

二项式定理的推导与理解

二项式定理是两个计数原理的直接应用，是我们解决二项展开式问题的工具，也为数学家解决有关微积分、概率问题奠定了基础.

（1）我们必须明确展开式中的项是如何产生的

因为 $(a+b)^n=(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$，所以由多项式的乘法法则知，$(a+b)^n$ 的展开式是从 n 个括号中的每个括号里各取 1 个字母的一切可能乘积的和.

（2）我们要理解展开式中每一项的特征

展开式的每一项由若干个 a 和若干个 b 的乘积构成，并且 a 和 b 的个数之和为 n；若我们设 b 的个数为 k，则 a 的个数为 $n-k$，即展开式中每一项的特征是 $a^{n-k}b^k(k=0,1,2,\cdots,n)$，展开式中共有 $n+1$ 种不同的项.

（3）我们要计算 $a^{n-k}b^k$ 同类项的个数（系数）

因为从 n 个因式 $(a+b)$ 中选出 k 个 $(a+b)$，有 C_n^k 种方法；而在这 k 个 $(a+b)$ 中取 b，在余下的 $(a+b)$ 中取 a，这样得到的乘积都是 $a^{n-k}b^k$，因此 $a^{n-k}b^k$ 同类项的个数就是从 n 个因式 $(a+b)$ 中选出 k 个 $(a+b)$ 的组合数 C_n^k.

（4）根据分类加法计数原理，我们可以得到二项式定理：

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^k a^{n-k}b^k+\cdots+b^n,$$

其中，$C_n^k a^{n-k}b^k$ 叫作二项展开式的通项（第 $k+1$ 项）.

探索与启示

从推导二项式定理的过程看，分析每一项的形成过程、每一项的指数特点、项数和系数都体现了两个基本计数原理和组合的应用. 逻辑推理链如下.