科学题阶

刷课时 刷单元 刷专题 刷综合
刷基础 刷易错 刷提升 刷高考

理想树

高中必刷题®

2026—2027学年

总 主 编：杨文彬
主　　编：赵成海等

含新定义、开放题等

配 狂K重点

AI赋能，“码”上提分

AI秒批改 · 类题智能推
预习卡 · 提升学习效率
视频讲解 · 做题不卡壳

数学

必修 第一册 RJ

配人教A版

首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

目录

CONTENTS

正文 答案

第一章 集合与常用逻辑用语

1.1 集合的概念 …… 刷基础 (1)(147)
1.2 集合间的基本关系 …… 刷基础 刷提升 (3)(148)
1.3 集合的基本运算 …… 刷基础 刷提升 (5)(150)
第 1.1～1.3 节综合训练 …… 刷能力 (7)(152)
专题 1 集合的综合问题 …… 刷难关 (8)(152)
1.4 充分条件与必要条件 …… (9)(153)
1.4.1 充分条件与必要条件 ⇔ 1.4.2 充要条件 …… 刷基础 (9)(153)
第 1.4 节综合训练 …… 刷能力 (11)(154)
1.5 全称量词与存在量词 …… (12)(155)
1.5.1 全称量词与存在量词 …… 刷基础 (12)(155)
1.5.2 全称量词命题和存在量词命题的否定 …… 刷基础 (13)(156)
第 1.5 节综合训练 …… 刷能力 (14)(156)
第一章素养检测 …… 刷速度 (15)(157)
第一章高考强化 …… 刷真题 刷原创 (18)(159)

第二章 一元二次函数、方程和不等式

2.1 等式性质与不等式性质 …… 刷基础 刷能力 (20)(160)
2.2 基本不等式 …… 刷基础 刷能力 (22)(162)
专题 2 利用基本不等式求最值 …… 刷难关 (25)(166)
2.3 二次函数与一元二次方程、不等式 …… 刷基础 刷能力 (26)(167)
第二章素养检测 …… 刷速度 (29)(170)
第二章高考强化 …… 刷真题 刷原创 (32)(172)

第三章 函数的概念与性质

3.1 函数的概念及其表示 …… (33)(173)
3.1.1 函数的概念 …… 刷基础 刷提升 (33)(173)
3.1.2 函数的表示法 …… 刷基础 刷提升 (36)(176)
第 3.1 节综合训练 …… 刷能力 (39)(178)
3.2 函数的基本性质 …… (40)(179)
3.2.1 单调性与最大(小)值 …… (40)(179)
课时 1 函数的单调性 …… 刷基础 (40)(179)
课时 2 函数的最大(小)值 …… 刷基础 刷提升 (42)(180)
3.2.2 奇偶性 …… 刷基础 刷提升 (45)(183)
第 3.2 节综合训练 …… 刷能力 (48)(185)
专题 3 函数的性质及应用 …… 刷难关 (49)(186)
3.3 幂函数 …… 刷基础 刷能力 (51)(188)

目录 CONTENTS

3.4 函数的应用(一) …… 刷基础 刷能力 (54)(191)
第三章素养检测 …… 刷速度 (57)(192)
第三章高考强化 …… 刷真题 刷原创 (60)(195)

第四章 指数函数与对数函数

4.1 指数 …… (62)(196)
4.1.1 n 次方根与分数指数幂 ⊕ 4.1.2 无理数指数幂及其运算性质 …… 刷基础 刷提升 (62)(196)
4.2 指数函数 …… (64)(198)
4.2.1 指数函数的概念 …… 刷基础 (64)(198)
4.2.2 指数函数的图象和性质 …… 刷基础 刷提升 (65)(198)
第 4.1，4.2 节综合训练 …… 刷能力 (68)(201)
4.3 对数 …… (69)(202)
4.3.1 对数的概念 ⊕ 4.3.2 对数的运算 … 刷基础 刷提升 (69)(202)
4.4 对数函数 …… (71)(203)
4.4.1 对数函数的概念 ⊕ 4.4.2 对数函数的图象和性质 …… 刷基础 刷提升 (71)(203)
4.4.3 不同函数增长的差异 …… 刷基础 (75)(207)
第 4.3，4.4 节综合训练 …… 刷能力 (76)(208)
专题 4 指数函数、对数函数 …… 刷难关 (77)(209)
4.5 函数的应用(二) …… (79)(212)
4.5.1 函数的零点与方程的解 …… 刷基础 刷提升 (79)(212)
4.5.2 用二分法求方程的近似解 …… 刷基础 (83)(216)
4.5.3 函数模型的应用 …… 刷基础 刷提升 (84)(216)
第 4.5 节综合训练 …… 刷能力 (87)(218)
第四章素养检测 …… 刷速度 (89)(220)
第四章高考强化 …… 刷真题 刷原创 (92)(223)

第五章 三角函数

5.1 任意角和弧度制 …… (95)(226)
5.1.1 任意角 …… 刷基础 (95)(226)
5.1.2 弧度制 …… 刷基础 (96)(227)
第 5.1 节综合训练 …… 刷能力 (98)(229)
5.2 三角函数的概念 …… (99)(230)
5.2.1 三角函数的概念 …… 刷基础 (99)(230)
5.2.2 同角三角函数的基本关系 …… 刷基础 (100)(230)
第 5.2 节综合训练 …… 刷能力 (102)(232)

目录

CONTENTS

5.3 诱导公式 …… 刷基础 刷能力 （103）（233）

5.4 三角函数的图象与性质 …… （105）（235）

5.4.1 正弦函数、余弦函数的图象 …… 刷基础 刷提升 （105）（235）

5.4.2 正弦函数、余弦函数的性质 …… （107）（236）

课时1 正弦函数、余弦函数的性质(1) …… 刷基础 （107）（236）

课时2 正弦函数、余弦函数的性质(2) … 刷基础 刷提升 （108）（237）

5.4.3 正切函数的性质与图象 …… 刷基础 刷提升 （111）（240）

第5.4节综合训练 …… 刷能力 （113）（242）

5.5 三角恒等变换 …… （115）（244）

5.5.1 两角和与差的正弦、余弦和正切公式 …… （115）（244）

课时1 两角和与差的正弦、余弦和正切公式 … 刷基础 刷提升 （115）（244）

课时2 二倍角的正弦、余弦、正切公式 … 刷基础 刷提升 （118）（247）

5.5.2 简单的三角恒等变换 …… 刷基础 （120）（249）

第5.5节综合训练 …… 刷能力 （121）（251）

专题5 三角恒等变换 …… 刷难关 （123）（253）

5.6 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ …… （124）（255）

5.6.1 匀速圆周运动的数学模型 微5.6.2 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象 …… 刷基础 （124）（255）

第5.6节综合训练 …… 刷能力 （127）（257）

专题6 求 ω 的值或取值范围 …… 刷难关 （129）（259）

5.7 三角函数的应用 …… 刷基础 刷能力 （130）（261）

第五章素养检测 …… 刷速度 （134）（263）

第五章高考强化 …… 刷真题 刷原创 （138）（266）

专练1 新定义、新情境专练 …… 刷素养 （141）（269）

专练2 开放题专练 …… 刷素养 （143）（271）

模块综合测试 …… 刷综合 （144）（272）

找深度解析还得看



- **易错警示**
  81个『易错警示』，将小细节一网打尽，快收下这份360°避坑指南！
- **多种解法**
  30个『多种解法』，拒绝僵化，灵活领先，多种思路，多种可能。
- **链接教材**
  回归教材，25个『链接教材』，助你夯实基础，以不变应万变！
- **思路导引**
  不再纠结于繁杂过程，20个『思路导引』直击破题点和隐含条件，助你一路绿灯。
- **规律方法**
  天才解题可不是靠乱猜的！ 68个『规律方法』帮你找规律，有捷径才能事半功倍。
- **名师点拨**
  老师点一点，玄机自然显。 23个『名师点拨』，老师的专属秘笈都属于你！

前方高能！

本书亮点剧透 HIGHLIGHTS



重难专题

重难就要刷又刷

专题① 集合的综合问题 …… 8

题型 1　已知集合间的关系和运算结果求参数
题型 2　集合中的新定义问题
题型 3　直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养在求解集合问题中的应用

专题② 利用基本不等式求最值 …… 25

题型 1　求简单代数式的最值
题型 2　利用配凑法求最值
题型 3　利用“1”的代换求最值
题型 4　和积转化法
题型 5　利用消元法或换元法求最值

专题③ 函数的性质及应用 …… 49

题型 1　分段函数的应用
题型 2　函数的单调性、奇偶性与最值
题型 3　函数的周期性和图象的对称性
题型 4　抽象函数的性质综合

专题④ 指数函数、对数函数 …… 77

题型 1　利用指数函数、对数函数的性质比较大小
· 角度 1　利用指数函数性质比较指数(式)大小
· 角度 2　利用对数函数性质比较对数(式)大小
· 角度 3　简单的指数、对数综合比较大小
· 角度 4　利用新构造函数的单调性比较大小
题型 2　指数函数与对数函数的图象
题型 3　应用指数函数、对数函数的性质确定参数的值或范围

专题⑤ 三角恒等变换 …… 123

题型 1　三角变换之变角
题型 2　三角变换之变名
题型 3　三角变换之升幂与降幂

专题⑥ 求 ω 的值或取值范围 …… 129

题型 1　已知单调性求 ω 的取值范围
题型 2　已知对称性求 ω 的值或取值范围
题型 3　已知零点求 ω 的取值范围
题型 4　已知最值点求 ω 的取值范围

狂K速览　找对要点不迷茫

突破 1　集合中的参数问题　P4
突破 1　已知集合间的运算结果求参数的值或取值范围　P9
单元高难问题 1　集合中的新定义问题　P11
拓展 2　掌握基本不等式求最值时的 5 种技巧　P22
突破 1　分段函数求值的方法　P40
突破 1　函数单调性的应用　P49
单元高难问题 4　函数恒成立问题和能成立问题　P55
拓展 6　函数图象的对称性　P47
单元高难问题 3　函数的周期性　P54
突破 3　抽象函数的单调性与奇偶性　P52
拓展 2　比较幂值大小的 3 种类型及处理方法　P69
拓展 3　比较对数式的大小　P78
突破　与指数函数有关的复合函数的定义域、值域、单调性　P70
拓展 2　求对数型函数的值域或最值的 4 种常用方法　P77
拓展 2　三角函数式的求值　P115
单元高难问题 6　求解三角函数中 ω 的取值范围　P111

高考新动向·科技前沿、创新情境

数据检索与笛卡尔积 …… P8 第 3 题
不同购买习惯下平均单价的比较 …… P21 第 5 题
糖水不等式的理解与应用 …… P21 第 8 题
AI 大模型训练效率的分析 …… P55 第 10 题
机器人分拣快递与人工分拣的对比 …… P56 第 5 题
牛顿三叉戟曲线的性质研究 …… P59 第 19 题
量子计算机的量子比特数量的计算 …… P70 第 5 题
人工智能大模型算力估计 …… P84 第 2 题
由碳 14 残余量估计文物年代 …… P84 第 3 题
人工智能模型总迭代次数估计 …… P85 第 7 题
手机低电量模式下的使用时间估计 …… P89 第 5 题
“赵爽弦图”中三角函数值的计算 …… P102 第 4 题
判断声音函数的周期 …… P114 第 9 题
葫芦曲线与直线交点纵坐标的判断 …… P132 第 3 题
根据声波图象判断模型 …… P132 第 5 题
判断“心形”图形的解析式 …… P144 第 3 题

高考新动向·模块融合

取整函数与一元二次不等式、充分必要条件的综合 …… P28 第 9 题
幂函数与一次函数、基本不等式的综合 …… P53 第 6 题
根据对称中心的结论判断与指数有关函数的对称中心及应用 …… P67 第 8 题
幂函数、余弦函数性质的综合与对数式、三角式比较大小 …… P113 第 5 题
二次函数、正弦函数性质与集合的综合 …… P114 第 13 题
对数函数性质与三角函数性质综合比较大小 …… P135 第 8 题
对数函数与余弦函数的性质综合 …… P142 第 9 题
基本不等式与指、对、幂运算的综合求最值 …… P145 第 10 题

高考新动向·新定义

新定义集合中的元素之和 …… P2 第 18 题
集合中的新定义——奇、偶子集个数的计算 …… P4 第 8 题
“交汇函数”定义的理解 …… P35 第 6 题
“p 界函数”与函数性质的综合 …… P48 第 4 题
“基点对”的理解与应用 …… P80 第 21 题
莱洛三角形的面积计算 …… P98 第 6 题
双曲正弦函数和双曲余弦函数的性质研究 …… P141 第 6 题
切比雪夫多项式与三倍角公式 …… P142 第 10 题

强基计划

【厦门大学 2024 强基计划】判断满足条件的集合 …… P2 第 19 题
【南京大学 2024 强基计划】判断集合中的元素个数 …… P2 第 20 题
【2025 全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）】判断两集合交集的元素个数 …… P6 第 9 题
【清华大学 2025 强基计划】求代数式的最值 …… P24 第 10 题
【北京大学 2025 强基计划】求代数式的最值 …… P24 第 11 题
【2026 中国科学技术大学少年班创新班入围考】根据不等式恒成立求参数范围 …… P28 第 10 题
【北京大学 2025 强基计划】求含参函数的函数值 …… P35 第 9 题
【2026 中国科学技术大学少年班创新班入围考】根据二次函数定义域、值域求参数范围 …… P44 第 8 题
【西安交通大学 2025 强基计划】求函数的最小值 …… P50 第 14 题
【清华大学 2023 强基计划】对数的运算 …… P70 第 12 题
【中国科学技术大学 2025 强基计划】求方程实数解的个数 …… P82 第 16 题
【东南大学 2025 强基计划】求与三角函数有关方程解的个数 …… P110 第 14 题
【清华大学 2024 强基计划】三角恒等变换求角 …… P122 第 15 题
【山东大学 2025 强基计划】三角恒等变换求正弦值 …… P122 第 16 题
【北京大学 2025 强基计划】三角恒等变换求正切值 …… P122 第 17 题

第一章 集合与常用逻辑用语

1.1 集合的概念





刷基础

答案 P147

题型 1 集合的含义与元素的特征

1. [山东济南 2026 高一期中]下列各组对象中，能构成集合的是 ( )

A. 班级里成绩好的同学

B. 喜欢运动的人

C. 小于 5 的正整数

D. $\sqrt{3}$ 的所有近似值

2. [湖南部分学校 2025 高一联考]集合 $A=\{a,b,c\}$ 中的三个元素表示某一个三角形的三边长度，那么这个三角形一定不是 ( )

A. 等腰三角形　　B. 锐角三角形

C. 直角三角形　　D. 钝角三角形

3. 由实数 $x,-x,|x|,\sqrt{x^2},(\sqrt{x^2})^2,-\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合，最多可含有的元素个数为 ( )

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

题型 2 元素与集合的关系

4. [吉林长春东北师大附中 2026 高一月考]下列所给四个关系中：①$2\in\mathbf{R}$；②$\sqrt{2}\in\mathbf{Z}$；③$0\in\mathbf{N}$；④$|-\sqrt{3}|\in\mathbf{Q}$，正确的个数为 ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. **(多选)** [浙江杭州 2026 高一期中]已知集合 $M=\{0,m+1,m^2-3\}$，且 $4\in M$，则 m 的值可以为 ( )

A. 3　　B. $\sqrt{7}$

C. -3　　D. $-\sqrt{7}$

6. **(多选)** 已知 x,y,z 为非零实数，代数式 $\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{z}{|z|}+\frac{|xyz|}{xyz}$ 的值所组成的集合是 M，则下列判断正确的是 ( )

A. $0\notin M$　　B. $2\in M$

C. $-4\in M$　　D. $4\in M$

7. 已知集合 $A=\{x|3x-1-m<0\}$，若 $1\in A$，则实数 m 的取值范围是_____.

8. [河北石家庄一中 2026 高一质量检测]已知集合 $A=\{x\mid x=m+\sqrt{3}n,m\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,x\in A\text{ 且}\frac{1}{x}\in A\right\}$.

(1)判断 $2+\sqrt{3}$，$3-\sqrt{3}$，0，$7+4\sqrt{3}$ 中的哪些元素属于 B；

(2)证明：若 $x\in B$，$y\in B$，则 $xy\in B$.

题型 3 集合的表示方法

9. [陕西西安交大附中 2026 高一月考]集合 $\{x\in\mathbf{N}|x-2<2\}$ 用列举法表示是 ( )

A. $\{1,2,3\}$　　B. $\{1,2,3,4\}$

C. $\{0,1,2,3,4\}$　　D. $\{0,1,2,3\}$

10. [天津第八中学 2026 高一月考]下列集合的表示正确的是 ( )

A. 自然数集可表示为 $\mathbf{N}$

B. 由 1,2,3,1,4 构成的集合是 $\{1,2,3,1,4\}$

C. 满足 $-2\leqslant x<1$ 的实数 x 构成的集合是 $\{-2\leqslant x<1\}$

D. 二次函数 $y=-x^2+1$ 图象上的所有点的坐标构成的集合是 $\{y|y=-x^2+1\}$

注：2025 表示 2024~2025 学年，2026 表示 2025~2026 学年。

11. [河南安阳 2026 高一联考]设集合 $A=\{1,9\}$，$B=\{x|x^2\in A\}$，则 B 中的元素个数最多为（　　）

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5

12. **(多选)** 已知集合 $M=\{(1,0)\}$，则下列与 M 相等的集合为（　　）

A. $\left\{(x,y)\left|\begin{cases}x-y=1,\\x+y=1\end{cases}\right.\right\}$

B. $\{(x,y)|y=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}\}$

C. $\left\{x\left|x=\dfrac{(-1)^n-1}{2},n\in\mathbf{N}\right.\right\}$

D. $\{x|-1<x<2,x\in\mathbf{N}\}$

13. [安徽合肥一中 2026 高一期中]若集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0\}$ 中只有一个元素，则满足条件的实数 a 为_____.

14. 教材 变式 选择适当的方法表示下列集合.

(1) Welcome 中的所有字母组成的集合；

(2) 所有正偶数组成的集合；

(3) 二元二次方程组 $\begin{cases}y=x,\\y=x^2\end{cases}$ 的解集；

(4) 所有正三角形组成的集合.

刷易错

易错点 1　忽略集合中元素的互异性而致错

15. [河北保定 2026 高一月考]若 $a\in\{-1,a^3\}$，则实数 a 的取值集合为_____.

易错点 2　不能正确理解集合的表示方法而致错

16. **(多选)** 给出下列说法，其中正确的是（　　）

A. 集合 $\{x\in\mathbf{N}|x^3=x\}$ 用列举法表示为 $\{0,1\}$

B. 实数集可以表示为 $\{x|x$ 为所有实数$\}$ 或 $\{\mathbf{R}\}$

C. 方程组 $\begin{cases}x+y=0,\\x-y=-1\end{cases}$ 的解组成的集合为 $\left\{x=-\dfrac{1}{2},y=\dfrac{1}{2}\right\}$

D. 方程 $(x-2)^2+(y+3)^2=0$ 的所有解组成的集合为 $\{(2,-3)\}$

17. 用列举法表示集合 $\left\{\dfrac{6}{9-x}\in\mathbf{N}\left|x\in\mathbf{N}\right.\right\}$ 的结果为_____.

易错点 3　不理解新定义的集合而致错

18. [湖北武汉华中科技大学附属中学 2026 高一月考]对于数集 A,B，定义 $A+B=\{x|x=a+b,a\in A,b\in B\}$，$A\div B=\left\{x\left|x=\dfrac{a}{b},a\in A,b\in B\right.\right\}$. 若集合 $A=\{1,2\}$，则集合 $(A+A)\div A$ 中所有元素之和为（　　）

A. 5　　B. $\dfrac{15}{2}$　　C. $\dfrac{21}{2}$　　D. $\dfrac{23}{2}$

刷素养

19. [厦门大学 2024 强基计划]以下数集与自然数集等势的是（　　）

注：若存在从集合 A 到集合 B 的一一对应，则称 A 与 B 等势.

A. 实数集　　B. 整数集

C. 无理数集　　D. 以上均是

20. [南京大学 2024 强基计划]集合 $S=\{n\in\mathbf{N}^*|1\leqslant n\leqslant 150,n^2-1$ 为 120 的倍数$\}$，则 S 的元素个数为_____.

1.2　集合间的基本关系

视频讲解　拍照批改

答案 P148

刷基础

题型 1　子集、真子集、空集

1. (多选)下列说法中,正确的有　(　)

A. 空集是任何集合的真子集

B. 若 $A\subsetneq B$,$B\subsetneq C$,则 $A\subsetneq C$

C. 任何一个集合必有两个或两个以上的真子集

D. 若不属于集合 B 的元素一定不属于集合 A,则 $A\subseteq B$

2. [黑龙江省实验中学 2026 高一月考]下列表示正确的是　(　)

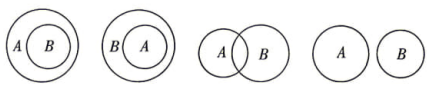
A. $a\subseteq\{a\}$　　B. $\pi\in\mathbf{Q}$

C. $\varnothing\subseteq\{0\}$　　D. $\{0\}=\varnothing$

3. [山东省实验中学 2026 高一期中]已知集合 $A=\{x|x<-3$ 或 $x>-1\}$,$B=\{x|-1<x<0\}$,则　(　)

A. $A>B$　　B. $A\subsetneq B$　　C. $B\subsetneq A$　　D. $A<B$

4. 设集合 $A=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{n}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}$,$B=\left\{x\,\middle|\,x=n+\frac{1}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}$,则下列图形能表示 A 与 B 关系的是(　)



A　　B　　C　　D

5. [河南南阳 2026 期中]已知集合 $A=\{x\in\mathbf{N}|-4<x^3<9\}$,则 A 的子集的个数为　(　)

A. 4　　B. 8　　C. 16　　D. 32

6. 已知集合 $A=\{x|x^2-7x+10=0,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x|1<x<6,x\in\mathbf{N}\}$,则满足条件 $A\subseteq C\subsetneq B$ 的集合 C 的个数为　(　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

题型 2　集合相等

7. (多选)[陕西汉中 2026 高一期中]下面表示同一个集合的是　(　)

A. $P=\{x|x^2-1=0,x\in\mathbf{R}\}$,$Q=\{x||x|=1,x\in\mathbf{R}\}$

B. $P=\{(2,5)\}$,$Q=\{(5,2)\}$

C. $P=\{2,5\}$,$Q=\{5,2\}$

D. $P=\{x|x=2m+1,m\in\mathbf{Z}\}$,$Q=\{x|x=2m-1,m\in\mathbf{Z}\}$

8. [北京理工大学附属中学 2026 高一月考]设 a,$b\in\mathbf{R}$,集合 $A=\{1,a,b\}$,$B=\{a,a^2,ab\}$,若 $A=B$,则 $a^{2\,023}-b^{2\,023}$ 的值为_____.

题型 3　根据集合间的关系求参数

9. [天津红桥区 2026 高一期中]已知集合 $A=\{0,1\}$,$B=\{-1,0,a+3\}$,$A\subseteq B$,则 $a=$　(　)

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. -2

10. 教材变式 [安徽蚌埠多校 2026 高一联考]设集合 $A=\{x|1<x\leqslant 2\}$,$B=\{x|x<a\}$,若 $A\subseteq B$,则实数 a 的取值范围是　(　)

A. $\{a|a\geqslant 2\}$　　B. $\{a|a>2\}$

C. $\{a|a\geqslant 1\}$　　D. $\{a|a\leqslant 2\}$

刷易错

易错点 1　混淆元素与集合、集合与集合之间的关系而致错

11. (多选)以下写法正确的是　(　)

A. $0\in\{x|x^2=0\}$

B. $\{1\}\in\mathbf{N}$

C. $\{2,1\}=\{x|x^2-3x+2=0\}$

D. $\{x|x<1\}\subseteq\{x|x<0\}$

易错点 2　忽视对空集的讨论而致错

12. 设集合 $A=\{x|x^2-8x+15=0\}$,$B=\{x|ax-1=0\}$,若 $B\subseteq A$,则实数 a 取值集合的真子集的个数为　(　)

A. 2　　B. 3　　C. 7　　D. 8

易错点 3　忽略端点的取值情况而致错

13. [湖北武汉六中 2026 高一月考]已知集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 5\}$,$B=\{x|m-1\leqslant x\leqslant 2m+1\}$,若 B 为 A 的真子集,则实数 m 的取值范围是　(　)

A. $\{m|-1\leqslant m\leqslant 2\}$

B. $\{m|m\leqslant 2\}$

C. $\{m|m\leqslant 3\}$

D. $\{m|m<-2$ 或 $-1\leqslant m\leqslant 2\}$

刷提升

必刷题型
- 判断集合间的关系 1、3、4、6(狂 K-P4 拓展 4)
- 子集的个数 5、7、8(狂 K-P3 拓展 3)
- 由集合间的关系求参数 2、9(狂 K-P4 突破 1)

答案 P149

1. [黑龙江哈尔滨 2025 高一期末]若 $A=\{x\mid x^2=x\}$,则下列说法正确的是 ( )

A. $\{\varnothing\}\subseteq A$　　B. $\{1\}=A$

C. $\{-1,1\}\subseteq A$　　D. $\{0\}\subseteq A$

2. 设集合 $A=\{x\mid -1<x<1\}$,$B=\{x\mid x-a>0\}$. 若 $A\subseteq B$,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $\{a\mid a\geqslant 1\}$　　B. $\{a\mid a>1\}$

C. $\{a\mid a<-1\}$　　D. $\{a\mid a\leqslant -1\}$

3. **(多选)**[福建宁德 2026 高一期中]下列说法正确的是 ( )

A. 集合 $\{2,4,6\}$ 的非空真子集的个数为 6

B. $\{x\mid x$ 是菱形$\}\in\{x\mid x$ 是正方形$\}$

C. 若 $M=\{x\mid x=3n+1,n\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{x\mid x=3n-2,n\in\mathbf{Z}\}$,则 $M=N$

D. $\varnothing\subseteq\{x\mid x^2+1=0,x\in\mathbf{R}\}$

4. [山东泰安一中 2025 高一月考]下列每组集合是相等集合的是 ( )

A. $A=\{x\in\mathbf{N}\mid |x|\leqslant 2\}$,$B=\{x\in\mathbf{Z}\mid |x|\leqslant 2\}$

B. $A=\{(x,y)\mid y=x\}$,$B=\{x\mid y=x\}$

C. $A=\{x\mid y=x\}$,$B=\left\{x\,\middle|\, y=\dfrac{x^2}{x}\right\}$

D. $A=\{x\mid x>0\}$,$B=\{y\mid y>0\}$

5. [河北五校 2026 高一期中]已知集合 A 满足 $\{1,2\}\subsetneq A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$,则满足条件的集合 A 的个数为 ( )

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 7

6. [四川成都七中 2026 高一月考]若集合 $A=\left\{x\,\middle|\, x=m+\dfrac{1}{6},m\in\mathbf{Z}\right\}$,$B=\left\{x\,\middle|\, x=\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{3},n\in\mathbf{Z}\right\}$,$C=\left\{x\,\middle|\, x=\dfrac{p}{2}+\dfrac{1}{6},p\in\mathbf{Z}\right\}$,则 A,B,C 之间的关系是 ( )

A. $A=B=C$　　B. $A\subseteq B=C$

C. $B=C\subseteq A$　　D. $B\subseteq C=A$

7. 已知整数集合 $M=\{m\mid$ 关于 x 的方程 $x^2+mx-36=0$ 有整数解$\}$,集合 A 满足条件:①$\varnothing\subsetneq A\subseteq M$;②若 $a\in A$,则 $-a\in A$. 则所有这样的集合 A 的个数为_____.

8. [江苏无锡 2026 高一质量检测]设集合 $U=\{1,2,\cdots,n\}$,若 $A\subseteq U$,将 A 中所有数的和记为 A 的容量(若 A 为空集,规定 A 的容量为 0),若 A 的容量为奇(偶)数,则称 A 为 U 的奇(偶)子集.

(1)若 $U=\{1,2,3\}$,则 U 的奇子集个数为_____;

(2)当 $U=\{1,2,\cdots,n\}$ 时,U 的偶子集个数(用 n 表示)为_____.

9. [吉林长春七中 2026 高一期中]已知集合 $A=\{-1,4\}$,$B=\{x\mid x^2+ax+b=0\}$,$C=\{x\mid mx-1=0\}$.

(1)若 $A=B$,求 a,b;

(2)若 $C\subseteq A$,求实数 m 的取值集合.



刷素养

10. [2023 全国高中数学联赛北京赛区预赛]S 是集合 $\{1,2,\cdots,2\,023\}$ 的子集,满足任意 2 个元素的平方和不是 9 的倍数,则 $|S|$ 的最大值是_____(这里 $|S|$ 表示 S 的元素个数).

高中
必刷题®

理想树

答案及解析

数学

必修 第一册 RJA



- 1194 道题逐一详析——每个步骤，都有迹可循。
- 215 个批注式解析，定位点出解题关键。
- 316 个规律方法、链接教材、二级结论、易错警示等栏目拆解重难点，从“会做一道题”到“通晓一类题”。

扫码对答案

努力的样子有很多种，每一种都是朝梦想更进一步

第一章　集合与常用逻辑用语

1.1　集合的概念

基础

C　【解析】对于A，“成绩好”没有具体的标准，所以班级里成绩好的同学是不确定的，故班级里成绩好的同学不能构成集合，故A不符合题意；
对于B，“喜欢运动”没有明确的标准，所以喜欢运动的人是不确定的，故喜欢运动的人不能构成集合，故B不符合题意；
对于C，小于5的正整数是确定的，故小于5的正整数能构成集合，故C符合题意；
对于D，$\sqrt{3}$的所有近似值，根据近似值的标准不一样得到的近似值不一样，因此对象不确定，故不能构成集合，故D不符合题意. 故选C.

规律方法　判断一组对象能否构成集合的关键是该组对象是否唯一确定，即是否能找到一个明确的标准，确定任意一个对象是不是给定集合中的元素.

2. A　【解析】根据集合中元素的互异性得$a\neq b$，$b\neq c$，$a\neq c$，故这个三角形一定不是等腰三角形. 故选A.

3. B　【解析】由题意，$\sqrt{x^2}$，$(\sqrt{x^2})^2$，$-\sqrt[3]{x^3}$可分别化为$|x|$，x^2，$-x$，所以由实数x，$-x$，$|x|$，$\sqrt{x^2}$，$(\sqrt{x^2})^2$，$-\sqrt[3]{x^3}$所组成的集合，最多可含有3个元素，分别为x，$-x$，x^2，此时$x\neq\pm1$且$x\neq0$. 故选B.

名师点拨　集合中的元素满足互异性，相同的元素只能算1个.

4. B　【解析】2是实数，故①正确；$\sqrt{2}$不是整数，故②错误；0是自然数，故③正确；$|-\sqrt{3}|$不是有理数，故④错误. 故选B.

5. ABD　【解析】集合$M=\{0,m+1,m^2-3\}$，且$4\in M$，所以$m+1=4$或$m^2-3=4$，解得$m=3$或$m=\pm\sqrt{7}$.

微黑板：求出参数m后，务必检验集合中的元素是否满足互异性

当$m=3$时，$M=\{0,4,6\}$，符合题意；
当$m=\sqrt{7}$时，$M=\{0,\sqrt{7}+1,4\}$，符合题意；
当$m=-\sqrt{7}$时，$M=\{0,-\sqrt{7}+1,4\}$，符合题意.
故m的值可以为$3,\pm\sqrt{7}$. 故选ABD.

6. CD　【解析】x,y,z同为正数时，代数式的值为4，所以$4\in M$；当x,y,z中只有一个负数或只有两个负数时，代数式的值为0，所以$0\in M$；当x,y,z同为负数时，代数式的值为-4，所以$-4\in M$，因此$2\notin M$. 故选CD.

7. $\{m|m>2\}$　【解析】因为$1\in A$，所以$3-1-m<0$，解得$m>2$，所以实数m的取值范围是$\{m|m>2\}$.

8. (1)【解】由题意可知$2+\sqrt{3}$，$3-\sqrt{3}$，0，$7+4\sqrt{3}$均是集合A中的元素，
又$\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}\in A$，$\frac{1}{3-\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\notin A$，$\frac{1}{0}$无意义，$\frac{1}{7+4\sqrt{3}}=7-4\sqrt{3}\in A$，
所以$2+\sqrt{3}$和$7+4\sqrt{3}$属于B.
(2)【证明】因为$x\in B$，$y\in B$，所以$x\in A$，$y\in A$，$\frac{1}{x}\in A$，$\frac{1}{y}\in A$.
令$x=m_1+\sqrt{3}n_1$，$y=m_2+\sqrt{3}n_2$，$m_1,n_1,m_2,n_2\in\mathbf{Z}$，
则$xy=(m_1+\sqrt{3}n_1)(m_2+\sqrt{3}n_2)=m_1m_2+3n_1n_2+\sqrt{3}(m_1n_2+m_2n_1)$，
而$m_1m_2+3n_1n_2\in\mathbf{Z}$，$m_1n_2+m_2n_1\in\mathbf{Z}$，所以$xy\in A$. 又$\frac{1}{x}\in A$，$\frac{1}{y}\in A$，所以$\frac{1}{xy}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\in A$，所以$xy\in B$.
因此，若$x\in B$，$y\in B$，则$xy\in B$.

规律方法　判断元素与集合关系的两种方法
(1)直接法：如果集合中的元素是直接给出的，只要判断该元素在已知集合中是否出现即可.
(2)推理法：对于一些没有直接给出元素的集合，只要判断该元素是否满足集合中元素所具有的特征即可.

9. D　【解析】$\{x\in\mathbf{N}|x-2<2\}=\{x\in\mathbf{N}|x<4\}=\{0,1,2,3\}$. 故选D.

10. A　【解析】对于A选项，自然数集可表示为$\mathbf{N}$，A正确；
对于B选项，由1，2，3，1，4构成的集合是$\{1,2,3,4\}$，B错误；
对于C选项，满足$-2\leqslant x<1$的实数x构成的集合是$\{x|-2\leqslant x<1\}$，C错误；
对于D选项，二次函数$y=-x^2+1$图象上的所有点的坐标构成的集合是$\{(x,y)|y=-x^2+1\}$，D错误.
故选A.

11. C　【解析】$\because A=\{1,9\}$，$B=\{x|x^2\in A\}$，$\therefore x^2=1$或$x^2=9$，解得$x=\pm1$或$x=\pm3$，$\therefore B$中最多有4个元素，$B=\{-3,-1,1,3\}$. 故选C.

12. AB　【解析】对于A，$\left\{(x,y)\left|\begin{cases}x-y=1,\\x+y=1\end{cases}\right.\right\}=\{(1,0)\}=M$.
对于B，$\{(x,y)|y=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}\}$中$\begin{cases}x-1\geqslant0,\\1-x\geqslant0,\end{cases}$解得$x=1$，故$\{(x,y)|y=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}\}=\{(1,0)\}=M$.
对于C，D，集合M为点集，而C，D中的集合均为数集，不可能相等. 故选AB.

13. 0或1　【解析】当$a=0$时，$2x+1=0$，则$x=-\frac{1}{2}$，故$A=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$，符合要求；
当$a\neq0$时，由题意知方程$ax^2+2x+1=0$只有一个解，则$\Delta=4-4a=0$，解得$a=1$.
综上所述，满足条件的实数a为0或1.

名师点拨　当$a\neq0$时，利用判别式即可求解a的值.

14. 【解】(1)列举法：列举出所有字母得$\{W,e,l,c,o,m\}$.
(2)描述法：正偶数可以写成正整数的2倍，所以用描述法表示为$\{x|x=2k,k\in\mathbf{N}^*\}$.
(3)列举法：求出该方程组的解，为$\begin{cases}x=1,\\y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=0,\\y=0,\end{cases}$所以用列举法表示为$\{(0,0),(1,1)\}$.
(4)描述法：$\{x|x$是正三角形$\}$.

链接教材　本题是教材第6页第4题的同类试题，考查用适当的方法表示集合. 选择集合表示方法时需要注意：
①元素较少的有限集采用列举法更好，列举时注意元素的互异性；
②文字描述的无限集用描述法更好，注意写清楚代表元素；
③方程的解集是数集，元素是数，方程组的解集是点集，元素是有序实数对.

易错

★易错点1　忽略集合中元素的互异性而致错

15. $\{0,1\}$　【解析】因为$a\in\{-1,a^3\}$，
当$a=-1$时，$a^3=-1$，不满足集合中元素的互异性，舍去.
当$a=a^3$，即$a(a-1)(a+1)=0$时，解得$a=0$或$a=1$或$a=-1$(舍去)，
当$a=0$时，$\{-1,a^3\}=\{-1,0\}$，符合要求；
当$a=1$时，$\{-1,a^3\}=\{-1,1\}$，符合要求.
故实数a的取值集合为$\{0,1\}$.

易错警示　本题是含参数的集合问题，根据题意求出参数的值后，要注意代入检验参数的值是否满足集合中元素的互异性. 本题的易错之处是忽视检验$a=-1$时是否满足集合中元素的互异性.

理想树

配套《高中必刷题》 把知识变成常识

狂K重点



COME ON
THIS IS YOUR
FIGHT

数学

学霸过三关

基础深 拓展实 疑难清

必修 第一册 RJA

目录

CONTENTS



第一章 集合与常用逻辑用语

1.1 集合的概念+1.2 集合间的基本关系 …（1）

1.3 集合的基本运算 ……（6）

单元高难问题1：集合中的新定义问题 ……（11）

1.4 充分条件与必要条件 ……（12）

1.5 全称量词与存在量词 ……（15）

第二章 一元二次函数、方程和不等式

2.1 等式性质与不等式性质 ……（17）

2.2 基本不等式 ……（20）

2.3 二次函数与一元二次方程、不等式 ……（26）

第三章 函数的概念与性质

3.1 函数的概念及其表示 ……（32）

3.2 函数的基本性质 ……（41）

单元高难问题2：对勾函数的图象与性质 …（53）

单元高难问题3：函数的周期性 ……（54）

单元高难问题4：函数恒成立问题和能成立问题 ……（55）

3.3 幂函数 ……（58）

3.4 函数的应用(一) ……（60）

第四章 指数函数与对数函数

4.1 指数 ……（63）

4.2 指数函数 ……（66）

4.3 对数 ……（72）

4.4 对数函数 ……（75）

4.5 函数的应用(二) ……（81）

单元高难问题5：复合函数的零点 ……（87）

第五章 三角函数

5.1 任意角和弧度制 ……（89）

5.2 三角函数的概念 ……（95）

5.3 诱导公式 ……（99）

5.4 三角函数的图象与性质 ……（103）

单元高难问题6：求解三角函数中 ω 的取值范围 ……（111）

5.5 三角恒等变换 ……（112）

5.6 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ ……（119）

5.7 三角函数的应用 ……（123）

当我用狂K时，我能用到什么？

知识全全get，重难拳拳K.O

- **基础深**：全课时知识深层梳理，从预习到复习，基础稳扎稳打，体系了然于心。
- **拓展实**：79个解题技巧尽数奉上，常看多练才能刻入DNA，试试升级刷题思路吧！
- **疑难清**：高难问题也抵不住高能思维，28个方法打破学习瓶颈，多方位突围疑难！

第一章 集合与常用逻辑用语

为一个普通的改变，都会改变普通。



1.1 集合的概念+1.2 集合间的基本关系

敲黑板

1. 集合的含义与表示

(1) **集合**：一些元素组成的总体.

(2) **元素与集合的关系**：$\begin{cases} a \in A, \\ a \notin A. \end{cases}$ 判断集合的关键

(3) **集合中元素的特性**：确定性；互异性；无序性. 求得集合中参数的值后需要代入，检验互异性

(4) **集合的表示方法**：列举法；描述法；Venn 图法.

2. 集合间的基本关系

(1) **子集** $A \subseteq B$：集合 A 中所有元素都是集合 B 中的元素.

(2) **集合相等** $A=B$：①集合 A,B 中元素相同；②$A \subseteq B$，且 $B \subseteq A$. 形式不同的两个集合也可能相等

(3) **真子集** $A \subsetneq B$：集合 $A \subseteq B$，但存在元素 $x \in B$，且 $x \notin A$. B 中至少有一个元素不是 A 中元素

(4) **空集** $\varnothing$：不含任何元素.

规定：空集是任何集合的子集.

知识深层理解

印象笔记

问题1 集合是什么？ 如何判断一个“全体”是集合？

提示 集合是数学中最基本的概念，它表示某些确定元素组成的总体. 这是一个抽象的概念，不是一个明确的具体定义，所以对于集合我们只能判断某个对象“是”或“不是”集合的元素，这个集合有什么特征，而不定义集合具体是什么.

判断一个“全体”是否能构成一个集合，关键是看组成这个“全体”的对象是否确定. 例如，“我国著名的演员”不能构成一个集合，因为“著名”很难界定，但是“获得过百花奖的演员”能构成一个集合.

◀集合是不加定义的数学术语，例如，某牧民所有的羊就构成一个集合.



问题2 集合中元素的特性是什么？ 如何理解？

提示 **①确定性**. 集合中的元素必须是确定的，一个元素要么属于这一集合，要么不属于这一集合，绝不是模糊的. 例如，“班上身高高于一米七的同学”是确定的，构成一个集合；而“班上个子高的同学”无法确定，不能构成集合.

②互异性. 集合中的元素一定是互不相同的或者说一个集合中不能出现相同的元素. 这个性质在应用集合中元素的特性求参数时常用到. 例如，若集合 $\{m,n\}$ 中的元素是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根，则有 $a \neq 0$，且 $b^2-4ac>0$.

◀集合中的元素，必须具备确定性、互异性、无序性. 反过来，一组元素若不具备这三个特性，则这组元素也就不能构成集合.

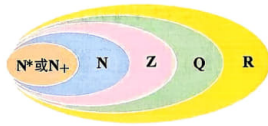
❸**无序性**. 集合中的元素不讨论顺序. 例如,$\{1,3,5\}$与$\{5,3,1\}$是同一个集合.

印象笔记

问题3 常用的数集有哪些? 它们之间有什么关系?

提示 正整数集:$\mathbf{N}^*$或$\mathbf{N}_+$,自然数集:$\mathbf{N}$,整数集:$\mathbf{Z}$,有理数集:$\mathbf{Q}$,实数集:$\mathbf{R}$. 它们之间的关系如图所示.

◀$\mathbf{N},\mathbf{N}^*$(或$\mathbf{N}_+$),$\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R}$等本身就表示集合,使用时不必再加"{ }".



$\mathbf{N}$比$\mathbf{N}^*$(或$\mathbf{N}_+$)只多一个元素0

问题4 如何选择恰当的方法表示集合?

提示 列举法可以看清集合的元素,集合含元素较少或所含元素不易表述,可选用列举法,如集合$\{x^2,3x-2,x^2+y^2\}$.

描述法可以看清集合元素的特征,一般含有较多元素或无数多个元素(尤其无限集)宜用描述法,如集合{1 000以内的质数},集合$\{(x,y)\mid y=x^2+1\}$等.

问题5 子集、真子集、集合相等的关系怎样归纳?

提示 ❶**子集**:如果A是B的子集,即$A\subseteq B$,那么A必须符合以下条件:A中的元素都是B中的元素(若A,B为有限集,则$\mathrm{card}(A)\leqslant\mathrm{card}(B)$).

◀$\mathrm{card}(A)$表示有限集合A中元素的个数.

❷**真子集**:如果A是B的真子集,即$A\subsetneq B$,那么A必须符合以下条件:A中的元素必须在B内,且B中存在不在A内的元素(若A,B为有限集,那么$\mathrm{card}(A)<\mathrm{card}(B)$). 集合$A$是集合$B$的真子集的前提是集合$A$是集合$B$的子集.

❸**集合相等**:如果集合A和B相等,那么它们所含的元素完全相同,与顺序无关,但要注意检验,排除与集合元素的互异性或与已知相矛盾的情形. 若$A\subseteq B$,同时$B\subseteq A$,则$A=B$,判断集合相等时可通过判断A是B的子集,并且B是A的子集得到.

特别地,当A与B为有限集时,若$A\subseteq B$且$\mathrm{card}(A)=\mathrm{card}(B)$,则$A=B$.

◀**子集、真子集的性质**

(1)**反身性**:任何一个集合是它自身的子集,即$A\subseteq A$.

(2)**传递性**:①对于集合A,B,C,由$A\subseteq B,B\subseteq C$,可得$A\subseteq C$;②对于集合$A,B,C$,由$A\subsetneq B,B\subsetneq C$,可得$A\subsetneq C$.

问题6 如何理解空集? ∅与{0},0,{∅}有什么关系?

提示 ❶空集是不含有任何元素的集合,且规定$\varnothing\subseteq\varnothing$,任何时候$x\in\varnothing$都不成立,$x\notin\varnothing$是恒成立的.

❷情景不同,空集的类型也不同,如$\{x\mid x^2-x+1=0,x\in\mathbf{R}\}=\varnothing$,$\{(x,y)\mid x^2+y^2<0,x,y\in\mathbf{R}\}=\varnothing$.

❸$\{\varnothing\}$不是空集,$\{\varnothing\}$中含有一个元素$\varnothing$,$\varnothing$作为元素,则$\varnothing\in\{\varnothing\}$;$\varnothing$作为集合,则$\varnothing\subseteq\varnothing$. $\{0\}$是含有一个元素0的集合,与空集不同,$0\in\{0\}$,$0\notin\varnothing$,$0\notin\{\varnothing\}$.

印象笔记

应试拓展注意

拓展1 集合中的元素与集合关系的3个疑点

识别集合的含义

①看代表元素. 例如，$\{x|p(x)\}$ 表示数集，$\{(x,y)|p(x,y)\}$ 表示点集.

②看条件. 例如，$\{x|y=x^2+3\}$ 表示使 $y=x^2+3$ 有意义的 x 的取值范围，因此 $\{x|y=x^2+3\}=\mathbf{R}$；$\{y|y=x^2+3\}$ 表示使 $y=x^2+3$ 有意义的 y 的取值范围，因此 $\{y|y=x^2+3\}=\{y|y\geqslant 3\}$；$\{(x,y)|y=x^2+3\}$ 是满足 $y=x^2+3$ 的点 (x,y) 的集合，即 $y=x^2+3$ 图象上的点.

理解描述法表示集合

①清楚符号“$\{x|x$ 的属性$\}$”表示的是所有具有某种属性的 x 的全体，而不是部分. 例如，实数集不可以表示为 $\{x|x$ 为所有实数$\}$，集合表示中的符号“{　}”已包含“所有”“全体”等含义，正确的表示应为 $\{x|x$ 为实数$\}$，也可以直接用 $\mathbf{R}$ 表示.

②从代表元素入手，弄清代表元素是什么. 如上面提到过的点集与数集的区分. 特别注意的是 (m,n) 表示有序实数对，即 m,n 的位置不可互换. 例如，$\{(3,5)\}$ 与 $\{(5,3)\}$ 表示不同的集合.

明确集合与元素的区别

集合是某些确定的对象构成的总体，对象称为元素，所以元素和集合是两个完全不同的概念. 例如，a 与 $\{a\}$ 是完全不同的，$\{a\}$ 表示一个集合，这个集合由一个元素 a 构成，a 是集合 $\{a\}$ 中的一个元素. 集合也可以作为元素，如集合 $\{\{a\},\{b\}\}$ 中，$\{a\}$ 是其中的一个元素.

拓展2 空集对集合关系的影响

①虽然空集不含有任何元素，但在研究集合关系时，空集却是最活跃的集合. 空集是任何集合的子集，即 $\varnothing\subseteq A$，其中“任何集合”当然也包括了 $\varnothing$，故会出现 $\varnothing\subseteq\varnothing$，而此时因为前面空集中无元素，不符合子集的定义，因此这一条是课本的“规定”.

②空集是任何非空集合的真子集，即若 $A\neq\varnothing$，则 $\varnothing\subsetneq A$，所以在遇到“$A\subseteq B$”或“$A\subsetneq B$ 且 $B\neq\varnothing$”时，一定要分 $A=\varnothing$ 和 $A\neq\varnothing$ 两种情况讨论，这里 $A=\varnothing$ 的情况易被忽视，应引起足够的重视.

拓展3 求子集与真子集的个数 二级结论

求集合子集的个数时，可根据集合中元素的个数来计算，因为集合中有 n 个元素，且每个元素都有两种可能，即在子集中或不在子集中，所以子集有 2^n 个，真子集和非空子集各有 (2^n-1) 个，非空真子集有 (2^n-2) 个.

【例1】 集合 A 满足 $\{0,2\}\subseteq A\subsetneq\{-1,0,1,2,3\}$，则满足条件的集合 A 的个数为_____.

解析：方法一（列举法）：根据题意，集合 A 至少含有0,2两个元素，但集合 $A\neq\{-1,0,1,2,3\}$，

◀

元素与集合的关系	
属于	$\in$
不属于	$\notin$

集合与集合的关系	
包含	$\subseteq$ 或 $\supseteq$
真包含	$\subsetneq$ 或 $\supsetneq$
相等	$=$

注意符号“$\in$”与“$\subseteq$”的区别，“$\in$”只能用于元素与集合之间，如 $0\in\mathbf{N}$，不能写成 $\{0\}\in\mathbf{N}$；“$\subseteq$”只能用于集合与集合之间，如 $\{0\}\subseteq\mathbf{N}$，不能写成 $0\subseteq\mathbf{N}$.

◀**判断元素与集合的关系的两种方法**

(1) **直接法**：如果集合中的元素是直接给出的，应首先明确集合是由哪些元素构成的，再判断该元素在已知集合中是否给出即可.

(2) **推理法**：对于某些不能直接表示的集合，应首先明确该集合中元素符合哪种表达式或满足哪些条件，再判断该元素是否满足这种表达式或条件即可.

◀$A\subseteq B\Rightarrow$

$$\begin{cases} A=\varnothing, \\ \text{或 } A\neq\varnothing, A\subsetneq B, \\ \text{或 } A\neq\varnothing, A=B. \end{cases}$$

◀注意要求解问题的措辞，明确其中个数的类别.

所以满足条件的集合 A 为 $\{0,2\}$，$\{0,2,-1\}$，$\{0,2,1\}$，$\{0,2,3\}$，$\{0,2,-1,1\}$，$\{0,2,-1,3\}$，$\{0,2,1,3\}$，共 7 个，所以满足条件的集合 A 的个数为 7.

方法二（计数法）：若集合 A 满足 $\{0,2\}\subseteq A\subsetneq\{-1,0,1,2,3\}$，所以集合 A 一定含有元素 0,2（可不考虑），可能含有的元素为 $-1,1,3$（不能全包含），所以集合 A 的个数即为集合 $\{-1,1,3\}$ 的真子集个数，即 $2^3-1=7$.

方法三：因为集合 $\{0,2\}$ 中有 2 个元素，$\{-1,0,1,2,3\}$ 中有 5 个元素，又集合 A 满足 $\{0,2\}\subseteq A\subsetneq\{-1,0,1,2,3\}$，所以集合 A 有 $2^{5-2}-1=7$ 个.

答案：7

印象笔记

◀若集合 A 中有 m 个元素，集合 B 中有 n 个元素（$m<n$），则
当 $A\subseteq C\subseteq B$ 时，集合 C 有 2^{n-m} 个；
当 $A\subseteq C\subsetneq B$ 时，集合 C 有 $(2^{n-m}-1)$ 个；
当 $A\subsetneq C\subseteq B$ 时，集合 C 有 $(2^{n-m}-1)$ 个；
当 $A\subsetneq C\subsetneq B$ 时，集合 C 有 $(2^{n-m}-2)$ 个.

拓展4 判断两集合关系的 2 种方法

①列举法：用列举法表示集合，再从元素中寻求关系.

②化简集合法：用描述法表示的集合，若代表元素的表达式比较复杂，往往需化简表达式，再寻求两个集合的关系.

◀证明两个集合相等常用的方法是证明：$A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$.

【例 2】 若集合 $A=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k}{3}-\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，$B=\left\{y\,\middle|\,y=\frac{k}{6}+\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，则 （ ）

A. $0\in A$　　B. $A\subseteq B$　　C. $B\subseteq A$　　D. $A=B$

解析：因为 $\frac{k}{3}-\frac{1}{2}=\frac{2k-3}{6}$，$\frac{k}{6}+\frac{1}{2}=\frac{k+3}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，而 $2k-3$ 表示奇数，$k+3$ 表示整数，所以 $A\subsetneq B$，即 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$. 若 $\frac{2k-3}{6}=0$，解得 $k=\frac{3}{2}\notin\mathbf{Z}$，故 $0\notin A$. 故选 B.

答案：B

K 疑难突破提高

突破1 集合中的参数问题

K分视频 B站:会放手的教书匠

根据集合中的元素或元素个数求参数

已知集合中的元素或元素个数，求参数的值或取值范围时，关键是对集合的表示方法灵活掌握，弄清集合中的元素是什么，依据已知条件，确定等量关系，列出方程，情况不唯一时需要分类讨论. 求集合中所含的参数时要考虑集合中元素的互异性，必要时需要进行验证.

◀分类讨论是高中数学常用的思想方法之一.
一般步骤：
①确定分类标准；
②恰当分类；
③逐类讨论、验证答案；
④归纳结论.

按集合中元素的取值分类

【例 3】 已知集合 A 含有三个元素 $a-3,2a-1,a^2-4$，若 $-3\in A$，求实数 a 的值.

解：$\because -3\in A$，

$\therefore a-3=-3$，或 $2a-1=-3$，或 $a^2-4=-3$. ← 分为三种情况

解得 $a=0$，或 $a=-1$，或 $a=\pm1$.

当 $a=0$ 时，$A=\{-3,-1,-4\}$；当 $a=1$ 时，$A=\{-2,1,-3\}$；

而当 $a=-1$ 时，$2a-1=a^2-4=-3$，与集合中元素的互异性矛盾，故舍去 $a=-1$. ← 排除不满足项

$\therefore a=0$ 或 $a=1$.