科学题机

刷课时 刷单元 刷专题 刷综合
刷基础 刷易错 刷提升 刷高考

理想树

高中必刷题®

2021

总 主 编：杨文彬
主　　编：赵成海

含新定义、开放题等

配 狂K重点

AI赋能，“码”上提分

AI错题本 · 类题智能推
预习卡 · 提升学习效率
视频讲解 · 一看就学会

数学

选择性必修 第一册 RJA

首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

目录 CONTENTS

正文 答案

第一章 空间向量与立体几何

1.1 空间向量及其运算 …… (1)(99)
1.1.1 空间向量及其线性运算 …… 基础 (1)(99)
1.1.2 空间向量的数量积运算 …… 基础 提升 (3)(100)
1.2 空间向量基本定理 …… 基础 (6)(103)
1.3 空间向量及其运算的坐标表示 …… (7)(104)
1.3.1 空间直角坐标系 ⊕ 1.3.2 空间向量运算的坐标表示 …… 基础 (7)(104)
第 1.1~1.3 节综合训练 …… 能力 (9)(106)
1.4 空间向量的应用 …… (11)(108)
1.4.1 用空间向量研究直线、平面的位置关系 …… (11)(108)
课时 1 空间中点、直线和平面的向量表示 …… 基础 (11)(108)
课时 2 空间线面位置关系的判定 …… 基础 (12)(108)
1.4.2 用空间向量研究距离、夹角问题 …… (14)(110)
课时 1 用空间向量研究距离问题 …… 基础 提升 (14)(110)
课时 2 用空间向量研究夹角问题 …… 基础 提升 (16)(114)
第 1.4 节综合训练 …… 能力 (20)(120)
专题 1 空间中的动点问题 …… 难关 (22)(122)
第一章素养检测 …… 速度 (23)(124)
第一章高考强化 …… 真题 原创 (27)(128)

第二章 直线和圆的方程

2.1 直线的倾斜角与斜率 …… (29)(131)
2.1.1 倾斜角与斜率 ⊕ 2.1.2 两条直线平行和垂直的判定 …… 基础 (29)(131)
第 2.1 节综合训练 …… 能力 (30)(132)
2.2 直线的方程 …… (31)(133)
2.2.1 直线的点斜式方程 …… 基础 (31)(133)
2.2.2 直线的两点式方程 …… 基础 (32)(133)
2.2.3 直线的一般式方程 …… 基础 (33)(134)
第 2.2 节综合训练 …… 能力 (34)(135)
2.3 直线的交点坐标与距离公式 …… (35)(136)
2.3.1 两条直线的交点坐标 …… 基础 (35)(136)
2.3.2 两点间的距离公式 …… 基础 (36)(137)
2.3.3 点到直线的距离公式 ⊕ 2.3.4 两条平行直线间的距离 …… 基础 (37)(138)
第 2.3 节综合训练 …… 能力 (38)(139)
专题 2 与直线有关的对称问题 …… 难关 (39)(141)
专题 3 与直线有关的最值问题 …… 难关 (40)(142)
2.4 圆的方程 …… (41)(143)
2.4.1 圆的标准方程 …… 基础 (41)(143)

目录 CONTENTS

2.4.2 圆的一般方程 …… 基础 (42)(144)
第2.4节综合训练 …… 能力 (43)(145)
2.5 直线与圆、圆与圆的位置关系 …… (44)(146)
2.5.1 直线与圆的位置关系 …… 基础 (44)(146)
2.5.2 圆与圆的位置关系 …… 基础 (46)(148)
第2.5节综合训练 …… 能力 (48)(150)
专题4 与圆有关的轨迹问题 …… 难关 (49)(152)
第二章素养检测 …… 速度 (50)(153)
第二章高考强化 …… 真题 原创 (53)(156)

第三章 圆锥曲线的方程
3.1 椭圆 …… (54)(158)
3.1.1 椭圆及其标准方程 …… 基础 提升 (54)(158)
3.1.2 椭圆的简单几何性质 …… (56)(160)
课时1 椭圆的简单几何性质 …… 基础 (56)(160)
课时2 直线与椭圆的位置关系 …… 基础 提升 (58)(161)
第3.1节综合训练 …… 能力 (61)(165)
3.2 双曲线 …… (63)(167)
3.2.1 双曲线及其标准方程 …… 基础 提升 (63)(167)
3.2.2 双曲线的简单几何性质 …… (65)(170)
课时1 双曲线的简单几何性质 …… 基础 (65)(170)
课时2 直线与双曲线的位置关系 … 基础 提升 (67)(172)
第3.2节综合训练 …… 能力 (70)(176)
3.3 抛物线 …… (72)(179)
3.3.1 抛物线及其标准方程 …… 基础 提升 (72)(179)
3.3.2 抛物线的简单几何性质 …… 基础 提升 (74)(181)
第3.3节综合训练 …… 能力 (76)(184)
专题5 求离心率的值或取值范围 …… 难关 (78)(187)
专题6 圆锥曲线中的中点弦、对称问题 …… 难关 (79)(189)
专题7 圆锥曲线中的范围、最值问题 …… 难关 (80)(190)
专题8 圆锥曲线中的定点、定值问题 …… 难关 (81)(191)
专题9 圆锥曲线中的存在、探索性问题 …… 难关 (82)(192)
第三章素养检测 …… 速度 (84)(193)
第三章高考强化 …… 真题 原创 (88)(197)

专练1 新定义、新情境专练 …… 素养 (92)(203)
专练2 开放题专练 …… 素养 (94)(205)
模块综合测试 …… 综合 (95)(206)

前方高能！

本书亮点剧透 HIGHLIGHT



重难专题

重难就要刷又刷

专题① 空间中的动点问题 …… 22

专题② 与直线有关的对称问题 …… 39

题型1 点关于点对称
题型2 点关于线对称
题型3 线关于点对称
题型4 线关于线对称

专题③ 与直线有关的最值问题 …… 40

题型1 两点间距离的最值问题
题型2 与距离之和（差）有关的最值问题
题型3 与面积有关的最值问题

专题④ 与圆有关的轨迹问题 …… 49

题型1 几何法求轨迹问题
题型2 代数法求轨迹问题
题型3 相关点法求轨迹问题

专题⑤ 求离心率的值或取值范围 …… 78

题型1 求 a,b,c 中任意两个的值
题型2 求 a,b,c 中任意两个的比值
题型3 构造 a,c 的齐次式

专题⑥ 圆锥曲线中的中点弦、对称问题 …… 79

题型1 中点弦问题
题型2 对称问题

专题⑦ 圆锥曲线中的范围、最值问题 …… 80

· 角度1 利用基本不等式求范围或最值
· 角度2 利用定义、几何性质求范围或最值
· 角度3 利用函数的性质求范围或最值

专题⑧ 圆锥曲线中的定点、定值问题 …… 81

· 角度1 证明直线过定点
· 角度2 证明几何量为定值

专题⑨ 圆锥曲线中的存在、探索性问题 …… 82

· 角度1 探索满足条件的点是否存在
· 角度2 探索满足条件的直线是否存在
· 角度3 探索满足条件的参数是否存在

狂K速览

找对重点不迷茫

单元高难问题1 空间中的探索性问题 P21
拓展3 与直线有关的对称问题的解决方法 P32
突破 利用直线的对称性解决距离最值问题 P33
突破1 求解与圆有关的轨迹方程问题的方法 P37
拓展4 求椭圆离心率的方法 P54
拓展3 求双曲线离心率的方法 P63
突破 椭圆的中点弦问题 P58
突破 双曲线的中点弦问题 P66
难点1 对称问题 P75
拓展5 利用圆锥曲线的定义或性质求最值 P54
难点2 最值(取值范围)问题 P75
难点3 定点与定值问题 P77
难点4 探索性问题 P78

高考新动向·科技前沿、创新情境

AI 折纸术中的数学原理 …… P5 第 4 题
圆柱形水管上蚂蚁爬行路径问题 …… P8 第 11 题
堑堵中线线垂直的判定 …… P12 第 8 题
古代建筑攒尖结构的理解 …… P18 第 7 题
《九章算术》刍甍中的空间角问题 …… P19 第 9 题
包装盒体积与空间角的计算 …… P20 第 5 题
“阿基米德多面体”结构特征的理解 …… P24 第 11 题
“欧拉线”概念的理解与应用 …… P34 第 3 题
“将军饮马”问题中的最短路程问题 … P36 第 3 题
台球反弹与点关于直线对称的结合 …… P39 第 5 题
阿波罗尼斯圆的理解与应用 …… P43 第 6 题
太极图中的直线斜率最值问题 …… P45 第 15 题
机器人追及中的距离最值问题 …… P48 第 8 题
AI 生成的曲线特征的理解 …… P51 第 11 题
根据“埙”的结构求半椭圆的方程 …… P61 第 2 题
工业凹槽中圆与双曲线的位置关系 …… P70 第 4 题
“一箭七星”中卫星接收天线的结构特征 … P76 第 4 题
机器人运动轨迹中双纽线的理解 …… P85 第 11 题
求曲线狭缝玩具中孔隙的曲线方程 …… P93 第 6 题
达·芬奇方砖中的空间向量的应用 …… P96 第 10 题

高考新动向·模块融合

正弦型函数图象与空间距离、角的求解 … P20 第 6 题
已知截距的对数运算关系求直线斜率 … P32 第 5 题
正余弦定理与点的轨迹的综合 …… P49 第 6 题
与直线的位置关系有关的概率问题 …… P51 第 13 题
三角函数与解析几何方程的含义 …… P63 第 3 题
已知投影向量的模求双曲线的离心率 …… P66 第 10 题

高考新动向·新定义

向量新定义运算及其几何意义 …… P10 第 11 题
平面法向量的理解与应用 …… P11 第 7 题
利用平面的点法式方程求点到平面的距离 … P15 第 5 题
“最远距离直线”与解析几何的结合 … P59 第 8 题
“黄金双曲线”定义的理解与应用 …… P68 第 8 题
斜椭圆定义的理解与应用 …… P98 第 19 题

强基计划

【清华大学 2024 强基计划】正四面体中求向量数量积的最值 …… P5 第 8 题
【2025 重庆高中数学联赛初赛】四面体中求点到直线的距离 …… P15 第 9 题
【2025 全国高中数学联赛江苏赛区预赛】已知二面角求三棱锥的体积 …… P21 第 10 题
【清华大学 2024 强基计划】点与直线、直线与直线位置关系的综合 …… P38 第 9 题
【2024THUSSAT 中学生标准学术能力诊断性测试】与圆有关的轨迹问题 …… P43 第 8 题
【北京航空航天大学 2025 强基计划】已知圆的对称轴求参数范围 …… P43 第 9 题
【清华大学 2025 强基计划】两圆相交求参数 …… P48 第 9 题
【浙江大学 2023 强基计划】椭圆焦点弦性质的应用 …… P62 第 9 题
【2023 全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）】圆与椭圆位置关系的综合 …… P62 第 10 题
【山东大学 2025 强基计划】椭圆中三角形面积最值问题 …… P62 第 11 题
【2025 全国高中数学联赛吉林赛区预赛】双曲线焦点三角形的应用 …… P71 第 11 题
【2025 全国高中数学联赛福建赛区预赛】求双曲线的离心率 …… P71 第 12 题
【清华大学 2024 强基计划】直线与抛物线的位置关系的综合应用 …… P77 第 13 题

第一章 空间向量与立体几何

1.1 空间向量及其运算

1.1.1 空间向量及其线性运算

视频讲解 错题本

刷基础

答案 P99

题型1 空间向量概念的理解

1. [辽宁省实验中学等校2026㊤高二联考]下列命题是假命题的是 (　　)

A. 与平面向量一样,任意两个空间向量都不能比较大小

B. "$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$"是"$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$"的必要不充分条件

C. 只有零向量的模等于0

D. 共线的单位向量都相等

2. [河南商丘2025高二月考]给出下列命题:

①将空间中所有的单位向量平移到同一个点为起点,则它们的终点构成一个圆;

②在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,必有 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$;

③若空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$;

④若 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反.

其中正确的个数是 (　　)

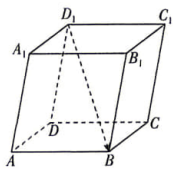
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

题型2 向量的加法、减法运算

3. [河北廊坊2026高二月考]已知空间四点 A,B,C,D,则 $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=$ (　　)

A. $\boldsymbol{0}$　　B. $\overrightarrow{AB}$　　C. $\overrightarrow{BA}$　　D. $\overrightarrow{BD}$

4. 教材变式 [浙江舟山五校2026高二期中联考]如图,在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$,则与 $\overrightarrow{D_1B}$ 相等的是 (　　)



A. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$　　B. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

C. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$　　D. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

5. 已知四边形 $ABCD$,O 为空间中任意一点,且 $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}$,则四边形 $ABCD$ 是 (　　)

A. 平行四边形　　B. 空间四边形

C. 等腰梯形　　D. 矩形

6. 在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB_1}|=$ (　　)

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

题型3 数乘概念的理解及运算

7. [湖北武汉2026高二月考]点 O 在平行四边形 $ABCD$ 所在平面外,AC 与 BD 交于点 M,则 $2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=$ (　　)

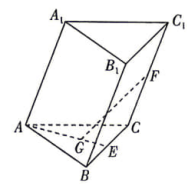
A. $3\overrightarrow{OM}$　　B. $\overrightarrow{OM}$　　C. $4\overrightarrow{OM}$　　D. $2\overrightarrow{OM}$

8. [安徽芜湖2026高二期中]已知四面体 $OABC$ 中,设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,$D$ 为 BC 的中点,E 为 OD 的中点,则 $\overrightarrow{AE}$ 可用向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示为 (　　)

A. $-\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}+\frac{1}{4}\boldsymbol{c}$　　B. $\boldsymbol{a}-\frac{1}{4}\boldsymbol{b}-\frac{1}{4}\boldsymbol{c}$

C. $-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$　　D. $\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$

9. 如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,E,F 分别是 BC,CC_1 的中点,G 为 $\triangle ABC$ 的重心,则 $\overrightarrow{GF}=$ (　　)



A. $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

B. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

C. $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

D. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

注:2025表示2024~2025学年,2026表示2025~2026学年。

题型4　向量共线、共面的判定及应用

10. 在下列命题中：

①若空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线，则空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所在的直线平行；

②若空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所在的直线为异面直线，则空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 一定不共面；

③若三个空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 两两共面，则向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面；

④若空间向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$ 共线，则 A,B,C,D 四点不一定共面.

其中真命题的个数是　　(　　)

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

11. [福建厦门外国语学校2026高二月考]已知非零空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b},\overrightarrow{BC}=-5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b},\overrightarrow{CD}=7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，则一定共线的三点是(　　)

A. A,B,C　　B. B,C,D

C. A,B,D　　D. A,C,D

12. **(多选)** [安徽合肥2025高二联考]已知点 A,B,C 不共线，对空间任意一点 O，下列等式中，A,B,C,M 四点一定共面的是　　(　　)

A. $\overrightarrow{OM}=3\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

B. $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

C. $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$

D. $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\boldsymbol{0}$

13. [河南漯河多校2026高二期中联考]已知 A,B,C,D 是平面四边形的四个顶点，O 是平面 $ABCD$ 外一点. 若 $\overrightarrow{OA}=2m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OD}+k\overrightarrow{AC}$，则 $2m+n=$　　(　　)

A. $1-k$　　B. $k-1$

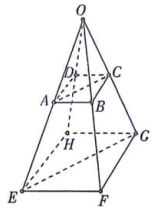
C. -1　　D. 1

14. [四川绵阳2026高二月考]如图，已知 $\overrightarrow{OE}=k\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OF}=k\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OD},\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+m\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EH}+m\overrightarrow{EF}$，其中 $k,m\in\mathbf{R}$. 求证：

(1) A,B,C,D 四点共面，E,F,G,H 四点共面；

(2) $\overrightarrow{AC}/\!/\overrightarrow{EG}$；

(3) O,G,C 三点共线.



刷易错

易错点　共面向量定理理解错误

15. **(多选)** 下列命题是假命题的是　　(　　)

A. 若向量 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面

B. 若 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面，则 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$

C. 若 $\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$，则 P,M,A,B 四点共面

D. 若 P,M,A,B 四点共面，则 $\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$

16. 已知空间任意一点 O 和不共线的三点 A,B,C. 若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}(x,y,z\in\mathbf{R})$，则“$x=2,y=-3,z=2$”是“$P,A,B,C$ 四点共面”的　　(　　)

A. 必要不充分条件

B. 充分不必要条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

1.1.2　空间向量的数量积运算

视频讲解　错题本

刷基础

答案 P100

题型 1　数量积的概念及运算律

1. [山东烟台 2026 高二月考]已知空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,则下列说法错误的是　(　)

A. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

B. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$

C. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

D. 若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向共线,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$

2. **(多选)**[福建厦门双十中学 2025 高二月考]设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为空间中的任意两个非零向量,则下列各式中正确的有　(　)

A. $\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$

B. $\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$

C. $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2$

D. $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$

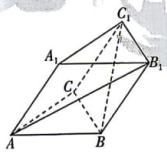
题型 2　求向量的数量积

3. **(多选)**已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1,则　(　)

A. $\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\overrightarrow{AC}=1$　　B. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A_1C}=1$

C. $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB_1}=1$　　D. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A_1D}=1$

4. [陕西西安中学 2026 高二月考]在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,底面边长和侧棱长都为 2,且 $\angle BAA_1=\angle CAA_1=60°$,则 $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}$ 的值为_____.



5. 已知空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,$|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=1$,$|\boldsymbol{c}|=4$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$ 的值为_____.

题型 3　向量的夹角及其应用

6. [浙江舟山多校 2026 高二联考]空间四边形 $ABCD$ 中,$BD=\sqrt{3}\,CD$,$\angle ADC=\dfrac{\pi}{6}$,$\angle ADB=\dfrac{\pi}{3}$,则 $\cos\langle\overrightarrow{DA},\overrightarrow{BC}\rangle$ 的值是　(　)

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. 0

7. [江苏无锡锡山高中 2025 高二期中]已知空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\sqrt{7}\,\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为　(　)

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{5\pi}{6}$

C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{2\pi}{3}$

8. 设 A,B,C,D 是空间中不共面的四点,且满足 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$,$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$,则 $\triangle BCD$ 一定是　(　)

A. 钝角三角形　　B. 锐角三角形

C. 直角三角形　　D. 等边三角形

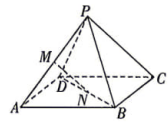
题型 4　向量垂直

9. [广东四校 2026 高二期中联考]已知 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是两两垂直的单位向量,$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$,则 $5\boldsymbol{a}\cdot3\boldsymbol{b}=$　(　)

A. −15　　B. −5

C. −3　　D. −1

10. [四川眉山 2025 高二联考]在正四棱锥 $P-ABCD$ 中,$PA=AB$,M 为 PA 的中点,$\overrightarrow{BD}=\mu\overrightarrow{BN}(\mu>1)$. 若 $MN\perp AD$,则 $\mu=$　(　)



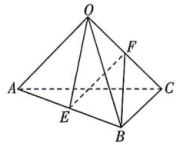
A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5

11. [广西玉林五校2026高二联考]如图,已知棱长为1的正四面体$OABC$,E,F分别是AB,OC的中点.

(1)用$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}$表示向量$\overrightarrow{EF}$;

(2)求证:$EF\perp AB$,$EF\perp OC$.



题型5　利用数量积求向量的模

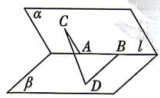
12. [安徽芜湖2026高二月考]已知正方体$ABCD-A'B'C'D'$的棱长为a,若$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA'})=1$,则$a=$　(　)

A. 2　　B. $\sqrt{2}$　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

13. [湖南株洲二中2025高二期末]在正四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,$AA_1=1$,$AB=\sqrt{2}$,$\cos\angle BAA_1=\frac{\sqrt{2}}{4}$,则$AC_1=$　(　)

A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{6}$

14. [北京人大附中2025高二月考]如图,二面角$\alpha-l-\beta$的大小为$\frac{\pi}{3}$,棱l上有A,B两点,线段$AC\subset\alpha$,$AC\perp l$,$BD\subset\beta$,$BD\perp l$.若$AC=3$,$BD=4$,$CD=7$,则线段AB的长为　(　)

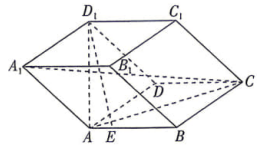


A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

15. 教材变式 [辽宁沈阳2026高二月考]如图,四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的所有棱长均为1,点E满足$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EB}$,设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$.

(1)用$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$表示$\overrightarrow{A_1C}$,$\overrightarrow{D_1E}$;

(2)若$AC=AD_1=\sqrt{2}$,$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD_1}=\frac{1}{2}$,求$|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}|$与$D_1E$的值.



题型6　投影向量

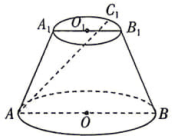
16. [云南红河2026高二期中]若非零空间向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$,则$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{b}$上的投影向量为　(　)

A. $2\boldsymbol{b}$　　B. $\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$　　C. $\boldsymbol{b}$　　D. $\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$

17. [广东惠州2026高二月考]已知空间向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{b}$上的投影向量是$-\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$,则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$　(　)

A. 1　　B. 2　　C. −1　　D. −2

18. 如图,A_1B_1,AB分别是圆台上、下底面的两条直径,且$AB=2A_1B_1$,$AB\parallel A_1B_1$,C_1是弧A_1B_1上靠近点B_1的三等分点,则$\overrightarrow{AC_1}$在$\overrightarrow{AB}$上的投影向量是　(　)



A. $\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$　　B. $\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$　　C. $\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}$　　D. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

涓涓细流一旦停止了喧哗,浩浩大海也就终止了呼吸。

刷提升　必刷题型　▸空间向量数量积的运算 1、4　▸根据向量的运算求夹角 2　▸数量积运算的综合应用 3、5、6、7(狂 K-P4 拓展 3)　答案 P102

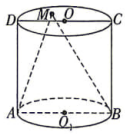
1. [湖南长沙长郡中学等校 2026 高二期中联考]已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=1$，$AB=2$，$AD=3$，若 $\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{c}$，则 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=$　(　)

A. 0　　B. 1　　C. 4　　D. 9

2. [河北秦皇岛 2026 高二期中]已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个空间单位向量，且向量 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值为(　)

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　B. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{1}{3}$

3. 如图，边长为 4 的正方形 $ABCD$ 是圆柱 OO_1 的轴截面，M 为上底面圆 O 内一点，则 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ 的最小值为　(　)



A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

4. **(多选)**[江苏南通海门中学 2026 高二段考]许多人童年的快乐源于一张纸的千变万化——工艺折纸，如今，这门古老的艺术正与 AI 深度融合. 另外，科学家利用 AI 算法设计能在太空展开的卫星结构，或可进入血管的微型机器人等，都离不开数学知识. 在平行四边形 $ABCD$ 中，$BC\perp BD$，$AB=2BD=2$，将三角形 ABD 沿着 BD 翻折至三角形 $A'BD$，则下列数量积可能为 0 的是　(　)

A. $\overrightarrow{A'B}\cdot\overrightarrow{BC}$　　B. $\overrightarrow{A'B}\cdot\overrightarrow{CD}$

C. $\overrightarrow{A'C}\cdot\overrightarrow{CD}$　　D. $\overrightarrow{A'C}\cdot\overrightarrow{AD}$

5. **(多选)**[四川广安 2026 高二月考]已知空间单位向量 $\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}$ 两两之间的夹角均为 60°，$\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{PE}$，$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BF}$，则下列说法正确的是　(　)

A. $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{1}{2}$

B. $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC})=-\frac{1}{2}$

C. $|\overrightarrow{EF}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\cos\langle\overrightarrow{AF},\overrightarrow{CP}\rangle=\frac{\sqrt{3}}{6}$

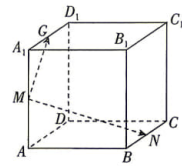
6. [重庆九龙坡区 2026 高二期中]若空间向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 满足 $|\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2|=|\boldsymbol{e}_2|=2$，则 $\boldsymbol{e}_2$ 在 $\boldsymbol{e}_1$ 上投影向量的模的最小值是　(　)

A. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$　　C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{3}{2}$

7. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4，M,N,G 分别是棱 AA_1,BC,A_1D_1 的中点，设 Q 是该正方体表面上的一点，若 $\overrightarrow{MQ}=x\overrightarrow{MG}+y\overrightarrow{MN}(x,y\in\mathbf{R})$.

(1)求点 Q 的轨迹围成图形的面积；

(2)求 $\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MQ}$ 的最大值.



刷素养

8. **(多选)**[清华大学 2024 强基计划]正四面体 $ABCD$ 中，棱长为 $2\sqrt{2}$，点 P 满足 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=2$，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD}$ 的　(　)

A. 最小值为 $4-2\sqrt{2}$

B. 最大值为 $2+2\sqrt{2}$

C. 最小值为 $2-2\sqrt{2}$

D. 最大值为 $4+2\sqrt{2}$

高中
必刷题®

理想树

答案及解析

数学

选择性必修 第一册 RJA



- 710 道题逐一详析——每个步骤，都有迹可循。
- 211 个批注式解析，定位点出解题关键。
- 195 个规律方法、链接教材、二级结论、易错警示等栏目拆解重难点，从“会做一道题”到“通晓一类题”。

扫码对答案

努力的样子有很多种，每一种都是朝梦想更进一步

第一章　空间向量与立体几何

1.1　空间向量及其运算

1.1.1　空间向量及其线性运算

刷基础

1. D　【解析】选项 A：由空间向量的定义知，空间向量具有大小和方向，所以任意两个空间向量都不能比较大小，故 A 为真命题；选项 B：两个向量的模相等，其方向不一定相同，充分性不成立，两个相等向量的模一定相等，必要性成立，故 B 为真命题；选项 C：长度为 0 的向量叫做零向量，只有零向量的模等于 0，故 C 为真命题；选项 D：共线的单位向量是相等向量或相反向量，故 D 为假命题. 故选 D.

2. B　【解析】对于①，根据空间向量的定义，空间中所有的单位向量平移到同一个点为起点，它们的终点构成一个球面，故①不正确；

→ 板书黑板：平面上所有单位向量平移到同一个点为起点，它们的终点构成一个圆

对于②，根据正方体的性质，上、下底面的对角线长必定相等，结合向量的方向，所以 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$，故②正确；

对于③，根据向量相等的定义可得③正确；

→ 板书黑板：方向相同，模相等

对于④，当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，但不能说 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反，故④不正确. 故选 B.

名师点拨　(1)空间向量的表示方法，以及零向量、单位向量、相等向量、相反向量等概念与平面向量相同.
(2)凡涉及空间中两个向量的问题，平面向量中有关结论仍然适用.
(3)空间向量是具有大小与方向的量，两个空间向量只有相等与不相等之分，而无大小之分.

3. C　【解析】依题意，$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}$. 故选 C.

名师点拨　空间向量是向量从二维到三维的推广，学习空间向量可以类比平面向量，在空间中，向量加法的平行四边形法则、三角形法则，以及相关的运算律仍然适用.

4. C　【解析】在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，由 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，根据空间向量的线性运算法则，可得 $\overrightarrow{D_1B}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD_1}=\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$. 故选 C.

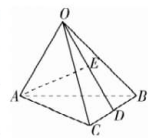
链接教材　本题与教材第 5 页练习第 3 题类似，考查空间向量的加、减运算. 向量加法满足平行四边形法则(起点相同，作平行四边形，对角线为和向量)和三角形法则(首尾相接，以最初的起点为起点，最后的终点为终点的向量为和向量).
向量减法：起点相同，终点相连，方向指向被减向量.

5. A　【解析】∵ $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}$，∴ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，∴ $AB\parallel DC$ 且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$，∴ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形. 故选 A.

6. B　【解析】$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB_1}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB_1}|=|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB_1}|=|\overrightarrow{AB_1}|=\sqrt{2}$. 故选 B.

7. D　【解析】因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形，所以 M 为 AC 和 BD 的中点，所以 $2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})-(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})=2\times2\overrightarrow{OM}-2\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OM}$. 故选 D.

8. A　【解析】如图，$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{AO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AO}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=-\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}+\frac{1}{4}\boldsymbol{c}$. 故选 A.



名师点拨　对空间向量进行线性运算时，要尽可能地使空间向量转化为平行四边形或三角形中的向量，运用向量加法的平行四边形法则、三角形法则，利用三角形的中位线、相似三角形等平面几何性质，把未知向量转化为与已知向量有直接关系的向量进行运算.

9. A　【解析】由题意可得 $\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC_1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1})=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1})=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$. 故选 A.

规律方法　$\triangle ABC$ 的重心 G 为三角形三条中线的交点，同时也是中线的三等分点.

10. A　【解析】对于①，若空间向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，则空间向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所在的直线可能平行，也可能重合，故①错误；
对于②，由于向量可以平移，故两个向量一定共面，故②错误；
对于③，任意两个向量自然是共面的，但三个向量不一定共面，例如正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AA_1}$ 两两共面，但显然三个向量不共面，故③错误；
对于④，若空间向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$ 共线，则 A，B，C，D 四点不一定共线，但一定共面，故④错误.
故选 A.

规律方法　(1)向量是自由的，可以平移，因此相等向量并不意味着起点和终点一定分别重合.
(2)两个点一定共线，三个点一定共面，若要三个点共线，则以其中任意两个点为起止点的两个向量共线.
(3)因为向量可以平移，所以两个向量一定共面. 若四个点共面，则以其中任意两个点为起止点的所有向量都共面.

11. C

思路导引　证明三点共线，借助向量共线证明即可，故解题目标是验证由三点组成的两个向量共线.

【解析】对于 A，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}$，∵ $\frac{1}{-5}\neq\frac{2}{6}$，∴ $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$ 不共线，即 A，B，C 三点不共线，故 A 不符合题意；
对于 B，$\overrightarrow{BC}=-5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，∵ $\frac{-5}{7}\neq\frac{6}{-2}$，∴ $\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$ 不共线，即 B，C，D 三点不共线，故 B 不符合题意；
对于 C，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=-5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$，∴ $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$，则 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BD}$ 共线，即 A，B，D 三点共线，故 C 符合题意；
对于 D，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}=-4\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，∵ $\frac{-4}{7}\neq\frac{8}{-2}$，∴ $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CD}$ 不共线，即 A，C，D 三点不共线，故 D 不符合题意. 故选 C.

理想树

配套《高中必刷题》 把知识变成常识

狂K重点

COME ON
THIS IS YOUR
FIGHT



数学

学霸过三关

基础深·拓展实·疑难清

选择性必修 第一册 RJA

目录

CONTENTS

第一章 空间向量与立体几何

1.1 空间向量及其运算 …… (1)
1.2 空间向量基本定理 …… (5)
1.3 空间向量及其运算的坐标表示 …… (9)
1.4 空间向量的应用 …… (14)
单元高难问题 1：空间中的探索性问题 …… (21)



第二章 直线和圆的方程



2.1 直线的倾斜角与斜率 …… (23)
2.2 直线的方程 …… (26)
2.3 直线的交点坐标与距离公式 …… (30)
2.4 圆的方程 …… (35)
2.5 直线与圆、圆与圆的位置关系 …… (38)
2.5.1 直线与圆的位置关系 …… (38)
2.5.2 圆与圆的位置关系 …… (46)
单元高难问题 2：数学思想方法在解决与圆有关问题中的应用 … (49)

第三章 圆锥曲线的方程

3.1 椭圆 …… (51)
3.2 双曲线 …… (59)
3.3 抛物线 …… (67)
单元高难问题 3：直线与圆锥曲线的位置关系 …… (72)
单元高难问题 4：圆锥曲线中的对称、最值(取值范围)、定点、定值问题 …… (75)



当我用狂K时，我能用到什么？

知识全全get，重难拳拳K.O

- **基础深**：全课时知识深层梳理，从预习到复习，基础稳扎稳打，体系了然于心。
- **拓展实**：50 个解题技巧尽数奉上，常看多练才能刻入 DNA，试试升级刷题思路吧！
- **疑难清**：高难问题也抵不住高能思维，10 个方法打破学习瓶颈，多方位突围疑难！



第一章 空间向量与立体几何

若你决定灿烂，山无遮，海无拦。

1.1 空间向量及其运算

敲黑板

1. 空间向量的有关概念

(1)空间向量:具有大小和方向的量.

(2)空间向量的长度(或模):空间向量的大小.

(3)单位向量:长度(或模)为 1 的向量. → 与向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$ 同方向的单位向量为 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$

(4)零向量:长度(或模)为 0 的向量. → 方向任意

(5)相等向量:方向相同且模相等的向量.

(6)相反向量:长度相等而方向相反的向量.

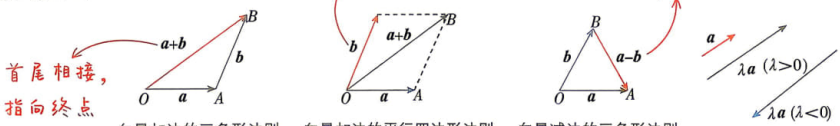
(7)共线向量(平行向量):表示向量的有向线段所在的直线互相平行或重合的向量. → 零向量与任意向量平行

(8)方向向量:在直线 l 上取非零向量 $\boldsymbol{a}$,与 $\boldsymbol{a}$ 平行的非零向量即直线 l 的方向向量.

(9)共面向量:平行于同一个平面的向量.

2. 空间向量的线性运算

空间中任意两个向量都是共面的,它们的加、减、数乘运算类似于平面向量的加、减、数乘运算(如图).



向量加法的三角形法则　向量加法的平行四边形法则　向量减法的三角形法则　向量数乘

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$　$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

3. 共线向量基本定理 → 可用来证明线线平行和三点共线

对于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线⇔存在实数 λ,使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

4. 共面向量定理 → 可用来证明点在平面内和直线平行于平面

$\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面($\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线)⇔存在唯一的有序实数对 (x,y),使 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$.

5. 空间向量的数量积运算

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$. → 结果是数量,可正,可负,可为 0

知识深层理解

印象笔记

问题　如何理解空间向量?它与平面向量有什么区别和联系?

提示　(1)空间点的一个平移就是一个向量.

(2)空间向量一般用有向线段表示.同向且等长的有向线段表示同一或相等的向量.

(3)空间的两个向量可用同一平面内的两条有向线段来表示.

空间向量是平面向量的延伸,它们没有本质区别,都是表示具有大小和方向的量,它们的运算规律完全相同. 空间向量的相关定理及公式与平面向量类似,可以类比学习. 所有的平面向量都是共面向量;空间中的任意两个非零向量都是共面向量,任意三个非零向量可能共面,也可能不共面.

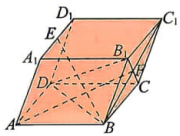
印象笔记

K 应试拓展注意

拓展1 空间向量的线性运算

把平面向量的运算推广到空间后,许多基本的运算规则没有变. 在解题过程中,要明确目标,灵活运用空间向量的运算规则,采用平移、取中点等技巧,或通过引入恰当的中间点,将一个向量表示为多个首尾相接向量的和,从而用已知向量表示未知向量,或对复杂表达式进行化简. 若表示的向量涉及线段的中点,可利用平行四边形法则来表示此向量,也可利用包含要表示的向量的封闭图形,根据封闭图形各边依次构成的向量之和为零向量得到相关式子. 求空间若干向量之和时,可通过平移,将它们转化为首尾相接的向量.

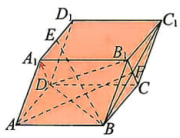
【例1】 如图,在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$,$E$ 为 A_1D_1 的中点,F 为 BC_1 与 B_1C 的交点.



(1)用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{DB_1}$,$\overrightarrow{BE}$,$\overrightarrow{AF}$;

(2)在图中标出 $\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}$ 化简结果的向量.

解:(1)$\overrightarrow{DB_1}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB_1}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BB_1}-\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$;



$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1E}=-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$;

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.

(2)$\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DD_1}+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB})=\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{DA_1}$.

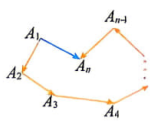
如图,连接 DA_1,则 $\overrightarrow{DA_1}$ 即为所求向量.

【关键技巧】空间向量加法的运算律要注意以下几点:

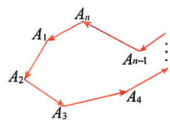
(1)首尾相接的若干向量之和,等于由起始向量的起点指向末尾向量的终点的向量,即 $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$,如图①.

(2)首尾相接的若干向量若构成一个封闭图形,则它们的和为零向量,即 $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\overrightarrow{A_nA_1}=\boldsymbol{0}$,如图②.

(3)两个向量相加的平行四边形法则在空间中仍然成立.



图①



图②

◀(1)空间向量的加法运算满足的运算律:

①交换律:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

②结合律:$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$.

(2)空间向量的数乘运算满足的运算律(其中 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$):

①分配律:$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$,$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$;

②结合律:$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

◀和空间向量的线性运算相关的结论

(1)在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,有 $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$.

(2)若 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,则 $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\boldsymbol{0}$ 或 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$,$O$ 为空间中任意一点.

拓展2　空间向量共线与共面的有关结论与应用

二级结论



	共线向量	共面向量
定义	如果表示若干空间向量的有向线段所在的直线互相平行或重合，那么这些向量叫做共线向量或平行向量	平行于同一个平面的向量，叫做共面向量
定理	对任意两个空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$存在 $\lambda\in\mathbf{R}$，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$	对不共线的两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面$\Leftrightarrow$存在唯一的有序实数对 (x,y)，使 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$
多点共线条件	A,P,B 三点共线 $\Leftrightarrow\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}(\lambda\in\mathbf{R})$ $\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{AB}(\lambda\in\mathbf{R})$ $\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$（$m+n=1$，点 O 不在直线 AB 上）	A,P,B,C 四点共面（A,B,C 三点不共线） $\Leftrightarrow\overrightarrow{AP}=u\overrightarrow{AB}+v\overrightarrow{AC}(u,v\in\mathbf{R})$ $\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+u\overrightarrow{AB}+v\overrightarrow{AC}(u,v\in\mathbf{R})$ $\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$（$x+y+z=1$，点 O 不在平面 ABC 上）
应用	判断三点共线、两向量共线或两直线平行	判断四点共面、三向量共面或直线平行于平面

利用向量共面的充要条件解决四点共面或线面平行等问题的实质是将几何问题转化为向量问题，特别注意区分共线定理与共面定理.

【例2】　已知 A,B,C 三点不共线，对平面 ABC 外的任一点 O，点 M 满足 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$. 判断点 M 是否在平面 ABC 内.

解：由已知得 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OM}$，

$\therefore\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC})$，即 $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$，

$\therefore\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$ 三个向量共面.

又$\because\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$ 有公共点 M，

$\therefore M,A,B,C$ 四点共面，即点 M 在平面 ABC 内.

【关键技巧】证明 M,A,B,C 四点共面有两种方法：

方法一，证明 $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$ 三个向量共面，需证明 $\overrightarrow{MA}=x\overrightarrow{MB}+y\overrightarrow{MC}$ 或 $\overrightarrow{MB}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MC}$ 或 $\overrightarrow{MC}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$；

方法二，证明 $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$（点 O 在平面 ABC 外），且 $x+y+z=1$，在选择题、填空题中判断四点共面多使用这个方法，解答题还是要回归到三个向量共面，再说明四点共面.

印象笔记

辨析：对不共线的三点 A,B,C，$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$（$x,y,z\in\mathbf{R}$）. 设 $p:x+y+z=1$，$q:P,A,B,C$ 四点共面. 若 O 为不在平面 ABC 内的任意一点，则 $p\Leftrightarrow q$. 若 O 为空间中任意一点，则 $p\Rightarrow q$，$q\not\Rightarrow p$.

证明：充分性：$\because x+y+z=1$，$\therefore z=1-x-y$，

$\therefore\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+(1-x-y)\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-x\overrightarrow{OC}-y\overrightarrow{OC}=x(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+y(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})+\overrightarrow{OC}$，$\therefore\overrightarrow{CP}=x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}$，$\therefore\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}$ 共面.

$\therefore P,A,B,C$ 四点共面.（此结论对 O 为空间中任意一点都成立）

必要性：$\because P,A,B,C$ 四点共面，$\therefore$ 设 $\overrightarrow{CP}=x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}$，

①若 O 为不在平面 ABC 内的任意一点，则 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}=x(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+y(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$，

$\therefore\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+(1-x-y)\overrightarrow{OC}$，

$\therefore$ 对 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，有 $x+y+z=1$.

②若点 O 在平面 ABC 内，则 P,A,B,C 四点共面$\not\Rightarrow x+y+z=1$.

拓展3 空间向量数量积的性质与应用

空间向量数量积的运算律

(1)$\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$,$\lambda\in\mathbf{R}$;

(2)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$(交换律);

(3)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$(分配律).

空间向量数量积的性质

(1)若$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$是非零向量,则$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

(2)若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同向,则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$;若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$反向,则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$.

(3)$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$,$|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2\pm2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}$.

(4)若θ为$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角,则$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$.

(5)$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$.

(6)向量$\boldsymbol{a}$在向量$\boldsymbol{b}$上的投影向量为$|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\cdot\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

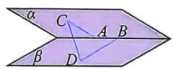
空间向量数量积性质的应用

(1)求一个向量的模或求两点间的距离,求向量的模可以把向量分解成几个已知向量的和,利用向量的平方等于向量的模的平方,进而求出向量的模,这里要注意向量和向量的夹角对数量积的影响;求两点间的距离可以转化为求向量的模的问题.

(2)求两直线的夹角θ,可以先取两直线的方向向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,再求$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$,但要注意向量夹角的取值范围为$[0,\pi]$,两直线的夹角的取值范围为$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,故$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle|$,进而得到$\theta$.

(3)证明两直线垂直时,可以先证明两非零向量垂直,进而证明两直线垂直.

【例3】 如图所示,已知在一个60°的二面角的棱上,有两个点A,B,AC,BD分别是在这个二面角的两个半平面内垂直于AB的线段,且$AB=4$ cm,$AC=6$ cm,$BD=8$ cm,求CD的长.



解:$\because\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$,

$\therefore\overrightarrow{CD}^2=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})^2=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})^2+\overrightarrow{BD}^2+2(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{BD}$

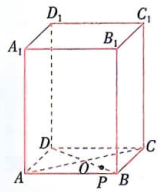
$=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{BD}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$

$=16+36+64-2\times6\times8\times\cos60°=68$,

$\therefore CD=2\sqrt{17}$ cm.

印象笔记

已知长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$,设O为AC的中点,P为BD上的一点,则对$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$,有$x=z$,$y$随着点$P$位置的变化而变化,不一定有$x+y+z=1$.



◀求空间向量的数量积的基本方法

(1)定义法:由数量积的定义$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$直接求解.

(2)基底法:根据已知条件选择恰当的基底,并用该基底表示所求的空间向量,利用数量积的定义即可求解.具体内容在下一节学习.