科学题阶

刷课时 刷单元 刷专题 刷综合
刷基础 刷易错 刷提升 刷高考

理想树

高中必刷题®

2021

总 主 编：杨文彬
主　　编：赵成海

含新定义、开放题等



配 狂K重点

AI赋能，“码”上提分

AI错题本·类题智能推
预习卡·提升学习效率
视频讲解·一看就学会

数学

选择性必修 第一册 RJB

首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

目录 CONTENTS

正文 答案

第一章 空间向量与立体几何

1.1 空间向量及其运算 …… (1)(91)
1.1.1 空间向量及其运算 …… (1)(91)
课时 1 空间向量及其线性运算 …… 基础 (1)(91)
课时 2 空间向量的数量积 …… 基础 提升 (3)(92)
1.1.2 空间向量基本定理 …… 基础 (5)(94)
1.1.3 空间向量的坐标与空间直角坐标系 …… 基础 (7)(95)
第 1.1 节综合训练 …… 能力 (9)(97)
1.2 空间向量在立体几何中的应用 …… (11)(99)
1.2.1 空间中的点、直线与空间向量 …… 基础 (11)(99)
1.2.2 空间中的平面与空间向量 …… 基础 (13)(101)
1.2.3 直线与平面的夹角 …… 基础 提升 (15)(103)
1.2.4 二面角 …… 基础 提升 (17)(106)
1.2.5 空间中的距离 …… 基础 (19)(109)
第 1.2 节综合训练 …… 能力 (20)(111)
专题 1 空间中的动点问题 …… 难关 (22)(114)
第一章素养检测 …… 速度 (23)(115)
第一章高考强化 …… 真题 原创 (27)(119)

第二章 平面解析几何

2.1 坐标法 …… 基础 (29)(122)
2.2 直线及其方程 …… (30)(122)
2.2.1 直线的倾斜角与斜率 …… 基础 (30)(122)
2.2.2 直线的方程 …… (31)(123)
课时 1 直线的点斜式、斜截式、两点式、截距式方程 …… 基础 (31)(123)
课时 2 直线的一般式方程 …… 基础 (33)(125)
2.2.3 两条直线的位置关系 …… 基础 (34)(125)
2.2.4 点到直线的距离 …… 基础 (35)(126)
第 2.2 节综合训练 …… 能力 (36)(127)
专题 2 与直线有关的对称问题 …… 难关 (37)(129)
专题 3 与直线有关的最值问题 …… 难关 (38)(130)
2.3 圆及其方程 …… (39)(131)
2.3.1 圆的标准方程 …… 基础 (39)(131)

目录 CONTENTS

2.3.2 圆的一般方程 …… 基础 （40）（132）

2.3.3 直线与圆的位置关系 …… 基础 （42）（133）

2.3.4 圆与圆的位置关系 …… 基础 （44）（135）

第2.3节综合训练 …… 能力 （46）（137）

2.4 曲线与方程 …… 基础 能力 （48）（140）

2.5 椭圆及其方程 …… （51）（143）

2.5.1 椭圆的标准方程 …… 基础 提升 （51）（143）

2.5.2 椭圆的几何性质 …… 基础 提升 （53）（145）

第2.5节综合训练 …… 能力 （56）（149）

2.6 双曲线及其方程 …… （57）（150）

2.6.1 双曲线的标准方程 …… 基础 提升 （57）（150）

2.6.2 双曲线的几何性质 …… 基础 提升 （59）（152）

第2.6节综合训练 …… 能力 （62）（155）

2.7 抛物线及其方程 …… （63）（157）

2.7.1 抛物线的标准方程 …… 基础 提升 （63）（157）

2.7.2 抛物线的几何性质 …… 基础 （65）（159）

第2.7节综合训练 …… 能力 （66）（160）

2.8 直线与圆锥曲线的位置关系 …… 基础 能力 （67）（162）

专题4 求离心率的值或取值范围 …… 难关 （71）（168）

专题5 直线与圆锥曲线的综合问题 …… 难关 （72）（170）

专题6 圆锥曲线中的范围、最值问题 …… 难关 （74）（172）

专题7 圆锥曲线中的定点、定值问题 …… 难关 （75）（173）

专题8 圆锥曲线中的存在、探索性问题 …… 难关 （76）（174）

第二章素养检测 …… 速度 （77）（175）

第二章高考强化 …… 真题 原创 （80）（179）

专练1 新定义、新情境专练 …… 素养 （84）（186）

专练2 开放题专练 …… 素养 （86）（187）

模块综合测试 …… 综合 （88）（190）

前方高能！本书亮点剧透 HIGHLIGHT



重难专题

重难就要刷又刷

专题① 空间中的动点问题 …… 22

专题② 与直线有关的对称问题 …… 37

题型1 点关于点对称
题型2 点关于线对称
题型3 线关于点对称
题型4 线关于线对称

专题③ 与直线有关的最值问题 …… 38

题型1 两点间距离的最值问题
题型2 与距离之和（差）有关的最值问题
题型3 与面积有关的最值问题

专题④ 求离心率的值或取值范围 …… 71

题型1 求出 a,b,c 中任意两个的值或范围
题型2 求出 a,b,c 中任意两个的比值或比值范围
题型3 构造关于 a,c 的齐次式

专题⑤ 直线与圆锥曲线的综合问题 …… 72

题型1 直线与圆锥曲线的位置关系
题型2 中点弦问题
题型3 对称问题

专题⑥ 圆锥曲线中的范围、最值问题 …… 74

专题⑦ 圆锥曲线中的定点、定值问题 …… 75

专题⑧ 圆锥曲线中的存在、探索性问题 …… 76

狂K速览 找对重点不迷茫

- 单元高难问题1 空间中的探索性问题 P20
- 拓展2 与直线有关的对称问题的解决方法 P31
- 突破 直线的对称性在求距离最值中的应用 P33
- 拓展3 求椭圆离心率的方法 P56
  拓展3 求双曲线离心率的方法 P62
- 突破1 中点弦问题 P73
  难点1 对称问题 P76
- 难点2 圆锥曲线中的最值（取值范围）问题 P76
- 难点3 定点与定值问题 P77

素养凝练

助你拓宽新思路

高考新动向 · 科技前沿、创新情境

圆柱形水管上蚂蚁爬行路径问题 …… P8 第18题
阳马中异面直线所成角的应用 …… P12 第14题
“刍甍”结构特征的理解 …… P18 第7题
“阿基米德多面体”结构特征的理解 …… P24 第11题
利用点关于直线对称求解台球反弹问题 … P37 第5题
“太极图”中求直线斜率的最值 …… P43 第15题
机器人在竞技区的追逐问题 …… P46 第12题
AI生成曲线方程的求解 …… P49 第4题
由洛伦兹曲线的方程求基尼系数 …… P49 第6题
“笛卡尔叶形线”上点的横、纵坐标和的取值范围 …… P50 第11题
“一箭七星”中卫星轨道与椭圆性质的结合 …… P53 第3题
蒙日圆与椭圆的综合应用 …… P55 第5题

高考新动向 · 科技前沿、创新情境

求“斜椭圆”的离心率 …… P56 第 3 题
求双曲线型冷却塔的最小直径 …… P62 第 3 题
求曲线狭缝玩具中孔隙的曲线方程 …… P84 第 4 题
机器人运动轨迹特征的分析 …… P85 第 8 题

高考新动向 · 模块融合

在正弦型函数曲线中求解空间距离和空间角 …… P20 第 6 题
对数运算与直线斜率的求解 …… P32 第 15 题
概率、点与圆位置关系的综合 …… P47 第 13 题
解三角形与点的轨迹的综合 …… P55 第 8 题
正方体表面上点的轨迹与抛物线中的最值问题 …… P77 第 5 题
空间位置关系的判断与圆锥曲线的综合 … P79 第 19 题

高考新动向 · 新定义

向量叉乘的理解与应用 …… P9 第 9 题
“表截面”定义的理解与空间角的计算 … P18 第 4 题
双纽线定义的理解及性质的分析 …… P49 第 8 题
“果圆”的理解及半椭圆离心率的求解 …… P71 第 7 题
四棱锥中求曼哈顿距离的最大值 …… P84 第 3 题

强基计划

【清华大学 2024 强基计划】正四面体中求向量数量积的最值 …… P4 第 9 题
【2025 重庆高中数学联赛初赛】四面体中求点到直线的距离 …… P21 第 10 题
【2025 全国高中数学联赛江苏赛区预赛】已知二面角求三棱锥的体积 …… P21 第 11 题
【清华大学 2024 强基计划】点与直线、直线与直线位置关系的综合应用 …… P36 第 9 题
【清华大学 2025 强基计划】由圆与圆的位置关系求参数 …… P47 第 16 题
【北京航空航天大学 2025 强基计划】已知圆的对称轴求参数范围 …… P47 第 17 题
【山东大学 2025 强基计划】求椭圆中三角形面积的最小值 …… P56 第 6 题
【南京大学 2024 强基计划】求双曲线的离心率 …… P62 第 7 题
【清华大学 2024 强基计划】直线与抛物线的位置关系的综合应用 …… P70 第 13 题
【全国中学生奥林匹克竞赛 2024 内蒙古初赛】求椭圆中三角形面积的最大值 …… P70 第 14 题



- **易错警示**
  33 个『易错警示』，将小细节一网打尽，快收下这份 360°避坑指南！
- **多种解法**
  40 个『多种解法』，拒绝僵化，灵活领先，多种思路，多种可能。
- **链接教材**
  回归教材，21 个『链接教材』，助你夯实基础，以不变应万变！
- **思路导引**
  不再纠结于繁杂过程，18 个『思路导引』直击破题点和隐含条件，助你一路绿灯。
- **规律方法**
  天才解题可不是靠乱猜的！ 19 个『规律方法』帮你找规律，有捷径才能事半功倍。
- **名师点拨**
  老师点一点，玄机自然显。 19 个『名师点拨』，老师的独家秘笈都属于你！

1.1 空间向量及其运算

1.1.1 空间向量及其运算

课时1 空间向量及其线性运算

视频讲解 错题本

刷基础

答案 P91

题型1 空间向量概念的理解

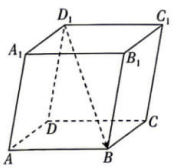
1. [辽宁省实验中学等校2026高二联考]下列命题是假命题的是 ( )
   A. 与平面向量一样,任意两个空间向量都不能比较大小
   B. "$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$"是"$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$"的必要不充分条件
   C. 只有零向量的模等于0
   D. 共线的单位向量都相等

2. [河南商丘2025高二月考]给出下列命题:
   ①将空间中所有的单位向量平移到同一个点为起点,则它们的终点构成一个圆;
   ②在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,必有$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$;
   ③若空间向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$满足$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,则$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$;
   ④若$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$,则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$方向相同或相反.
   其中假命题的个数是 ( )
   A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

题型2 向量的加法、减法运算

3. [内蒙古赤峰2026高二期中]已知空间四点A,B,C,D,则$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=$ ( )
   A. $\boldsymbol{0}$ B. $\overrightarrow{AB}$ C. $\overrightarrow{BA}$ D. $\overrightarrow{BD}$

4. [山东滨州2026高二期中]如图,在平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,若$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$,则与$\overrightarrow{D_1B}$相等的是 ( )

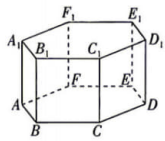


   A. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ B. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$
   C. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ D. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

5. 已知有四边形$ABCD$,O为空间任意一点,且$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}$,则四边形$ABCD$是 ( )
   A. 平行四边形 B. 空间四边形
   C. 等腰梯形 D. 矩形

6. 在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB_1}|=$ ( )
   A. 1 B. $\sqrt{2}$
   C. $\sqrt{3}$ D. 2

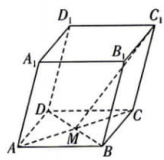
7. 教材变式 [江西九江2026高二月考]如图,在正六棱柱$ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$中.



   (1)化简:$\overrightarrow{A_1F_1}-\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{FF_1}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{F_1A_1}=$_____;
   (2)化简:$\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{E_1F_1}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{A_1E_1}=$_____.

题型3 数乘概念的理解及运算

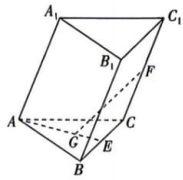
8. 如图,在平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,AC与BD的交点为点M,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$,则下列向量中与$\overrightarrow{C_1M}$相等的向量是 ( )



   A. $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ B. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$
   C. $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ D. $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

注:2025表示2024~2025学年,2026表示2025~2026学年。

9. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，E,F 分别是 BC,CC_1 的中点，G 为 $\triangle ABC$ 的重心，则 $\overrightarrow{GF}=$（　　）



A. $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

B. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

C. $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

D. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

10. [湖北武汉 2026 高二月考] 点 O 在平行四边形 $ABCD$ 所在平面外，AC 与 BD 交于点 M，则 $2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=$（　　）

A. $3\overrightarrow{OM}$　　B. $\overrightarrow{OM}$　　C. $4\overrightarrow{OM}$　　D. $2\overrightarrow{OM}$

11. [山西朔州 2026 高二月考] 在空间四边形 $ABCD$ 中，G 为 $\triangle BCD$ 的重心，E,F,H 分别为边 CD,AD 和 BC 的中点，化简下列各表达式.

(1) $\overrightarrow{AG}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$；

(2) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})$.

题型 4　三点共线的判定

12. [福建厦门外国语学校 2026 高二月考] 已知非零空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，则一定共线的三点是（　　）

A. A,B,C

B. B,C,D

C. A,B,D

D. A,C,D

13. [湖南永州 2025 高二月考] 下列条件中，能说明空间中不重合的三点 A,B,C 共线的是（　　）

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

B. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{BC}$

D. $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$

刷易错

易错点　向量概念理解错误

14. 给出下列四个命题：

①方向相反的两个向量是相反向量；

②若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$ 且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向，则 $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$；

③已知有四边形 $ABCD$，则四边形 $ABCD$ 是平行四边形的充要条件是 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$；

④对于任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，必有 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

其中正确命题的序号为_____.

15. 对于空间中的非零向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}$，有下列各式：

①$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$；

②$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$；

③$|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}|$；

④$|\overrightarrow{AB}|-|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$.

其中一定不成立的是_____.（填序号）

课时2　空间向量的数量积

错题本

刷基础

答案 P92

题型1　数量积的概念及运算律

1. [山东烟台2026高二月考]已知空间向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,则下列说法错误的是　(　)

A. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

B. 若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,则$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$

C. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

D. 若向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$同向共线,则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$

2. (多选)已知$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为空间中的任意两个非零向量,则下列各式正确的有　(　)

A. $\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$　　B. $\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$

C. $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2$　　D. $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$

题型2　求向量的投影、数量积

3. (多选)[河南洛阳2025高二月考]已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1,则　(　)

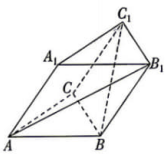
A. $\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\overrightarrow{AC}=1$　　B. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A_1C}=1$

C. $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB_1}=1$　　D. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A_1D}=1$

4. [云南红河2026高二期中]若非零空间向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$,则$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{b}$上的投影为　(　)

A. $2\boldsymbol{b}$　　B. $\dfrac{3}{2}\boldsymbol{b}$　　C. $\boldsymbol{b}$　　D. $\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$

5. 教材变式 [陕西西安中学2026高二月考]在斜三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中,底面边长和侧棱长都为2,且$\angle BAA_1=\angle CAA_1=60°$,则$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}$的值为_____.



题型3　向量的夹角及其应用

6. 空间四边形$ABCD$中,$BD=\sqrt{3}CD$,$\angle ADC=\dfrac{\pi}{6}$,$\angle ADB=\dfrac{\pi}{3}$,则$\cos\langle\overrightarrow{DA},\overrightarrow{BC}\rangle$的值是　(　)

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. 0

7. 已知空间向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$满足$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\sqrt{7}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$,则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为　(　)

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{5\pi}{6}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{2\pi}{3}$

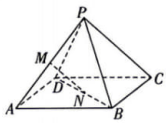
题型4　向量垂直

8. 已知长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$,下列向量的数量积一定不为0的是　(　)

A. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD_1}$　　B. $\overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{B_1C}$

C. $\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{BC}$　　D. $\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{AC}$

9. 在正四棱锥$P-ABCD$中,$PA=AB$,M为PA的中点,$\overrightarrow{BD}=\mu\overrightarrow{BN}(\mu>1)$.若$MN\perp AD$,则$\mu=$　(　)



A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

题型5　利用数量积求向量的模

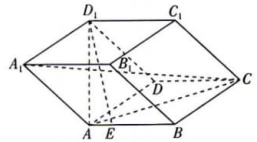
10. [湖南株洲二中2025高二期末]在正四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,$AA_1=1$,$AB=\sqrt{2}$,$\cos\angle BAA_1=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$,则$AC_1=$　(　)

A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{6}$

11. [辽宁沈阳2026高二月考]如图,四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的所有棱长均为1,点E满足$\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{EB}$,设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$.

(1)用$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$表示$\overrightarrow{A_1C}$,$\overrightarrow{D_1E}$;

(2)若$AC=AD_1=\sqrt{2}$,$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD_1}=\dfrac{1}{2}$,求$|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}|$与$D_1E$的值.



刷提升 必刷题型 ▸空间向量数量积的运算 1、7 ▸根据向量运算求夹角 2 ▸空间向量数量积运算的综合应用 3、4、5、6、8(狂 K-P4 拓展 3)

答案 P93

1. [湖南长沙长郡中学等校 2026 高二期中联考] 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AA_1=1$,$AB=2$,$AD=3$,若 $\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{c}$,则$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=$ ( )

A. 0 B. 1 C. 4 D. 9

2. [河北秦皇岛 2026 高二期中]已知 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是两个空间单位向量,且向量 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影为 $\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$,则向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值为 ( )

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

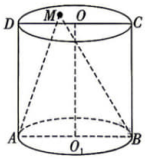
C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

3. 在三棱锥 $S-ABC$ 中,$(\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{BS})\cdot(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA})=0$,则 $\triangle ABC$ 是 ( )

A. 等边三角形 B. 直角三角形

C. 等腰三角形 D. 等腰直角三角形

4. [广西多校 2025 高二联考]如图,边长为 4 的正方形 $ABCD$ 是圆柱 OO_1 的轴截面,M 为上底面圆 O 内一点,则 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ 的最小值为 ( )



A. 6 B. 8 C. 10 D. 12

5. (多选)[四川广安 2026 高二月考]已知空间单位向量 $\overrightarrow{PA}$,$\overrightarrow{PB}$,$\overrightarrow{PC}$ 两两之间的夹角均为 60°,$\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{PE}$,$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BF}$,则下列说法正确的是 ( )

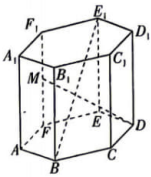
A. $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{1}{2}$ B. $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC})=-\frac{1}{2}$

C. $|\overrightarrow{EF}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\cos\langle\overrightarrow{AF},\overrightarrow{CP}\rangle=\frac{\sqrt{3}}{6}$

6. [辽宁大连 2026 高二月考]若空间向量 $\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$ 满足 $|\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2|=|\boldsymbol{e}_2|=2$,则 $\boldsymbol{e}_2$ 在 $\boldsymbol{e}_1$ 上投影的长度的最小值是 ( )

A. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

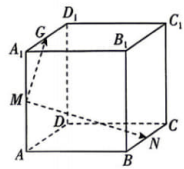
7. [浙江杭州二中 2025 高二期中(改编)]如图,在正六棱柱 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 中,M 为 FF_1 的中点. 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$. 若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{c}|=2$,则 $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{BE_1}$ 的值是_____.



8. 如图,已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4,M,N,G 分别是棱 AA_1,BC,A_1D_1 的中点,设 Q 是该正方体表面上的一点,若 $\overrightarrow{MQ}=x\overrightarrow{MG}+y\overrightarrow{MN}$ $(x,y\in\mathbf{R})$.

(1)求点 Q 的轨迹围成图形的面积;

(2)求 $\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MQ}$ 的最大值.



刷素养

9. (多选)[清华大学 2024 强基计划]正四面体 $ABCD$ 中,棱长为 $2\sqrt{2}$,点 P 满足 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=2$,则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD}$ 的 ( )

A. 最小值为 $4-2\sqrt{2}$ B. 最大值为 $2+2\sqrt{2}$

C. 最小值为 $2-2\sqrt{2}$ D. 最大值为 $4+2\sqrt{2}$

1.1.2　空间向量基本定理

视频讲解　错题本

刷基础

答案 P94

题型 1　向量共线的判定及应用

1. 已知空间四点 O,A,B,P 满足 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$，其中 $m+n=1$，则下列说法正确的是　(　)

A. 点 P 一定在直线 AB 上

B. 点 P 一定不在直线 AB 上

C. 点 P 不一定在直线 AB 上

D. 以上都不对

2. 已知非零空间向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线，使 $k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$ 共线的 k 的值是_____.

题型 2　向量共面的判定及应用

3. (多选)[山东枣庄 2025 高二月考]已知点 A,B,C 不共线，对空间任意一点 O，下列等式中，A,B,C,M 四点一定共面的是　(　)

A. $\overrightarrow{OM}=3\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

B. $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

C. $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$

D. $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\boldsymbol{0}$

4. [山东青岛 2026 高二期中]已知动点 Q 在 $\triangle ABC$ 所在平面内运动，若对于空间中不在平面 ABC 上的任意一点 P，都有 $\overrightarrow{PQ}=-2\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}+m\overrightarrow{CP}$，则实数 m 的值为　(　)

A. 0　　B. 2

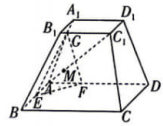
C. -1　　D. -2

5. [河南漯河多校 2026 高二期中联考]已知 A,B,C,D 是平面四边形的四个顶点，O 是平面 $ABCD$ 外一点. 若 $\overrightarrow{OA}=2m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OD}+k\overrightarrow{AC}$，则 $2m+n=$　(　)

A. $1-k$　　B. $k-1$

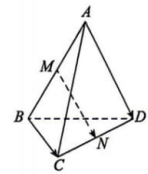
C. -1　　D. 1

6. [广东广州 2026 高二期中]如图，在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2A_1B_1$，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{A_1G}=\frac{1}{4}\overrightarrow{A_1A}$. 直线 AC_1 与平面 EFG 交于点 M，则 $\frac{AM}{AC_1}=$　(　)



A. $\frac{6}{23}$　　B. $\frac{3}{16}$　　C. $\frac{3}{19}$　　D. $\frac{12}{17}$

7. 教材 变式 如图所示，M,N 分别是空间四边形 $ABCD$ 的边 AB,CD 的中点. 试判断向量 $\overrightarrow{MN}$ 与向量 $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}$ 是否共面.



题型 3　空间向量基本定理的理解

8. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，可以作为空间的一组基底的是　(　)

A. $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$　　B. $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{AB_1}$

C. $\overrightarrow{D_1A_1},\overrightarrow{D_1C_1},\overrightarrow{D_1D}$　　D. $\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{A_1C},\overrightarrow{BB_1}$

高中
必刷题

理想树

答案及解析

数学

选择性必修 第一册 RJB



- 694 道题逐一详析——每个步骤，都有迹可循。
- 198 个批注式解析，定位点出解题关键。
- 189 个规律方法、链接教材、二级结论、易错警示等栏目拆解重难点，从“会做一道题”到“通晓一类题”。

扫码对答案

努力的样子有很多种，每一种都是朝梦想更进一步

第一章　空间向量与立体几何

1.1　空间向量及其运算

1.1.1　空间向量及其运算

课时1　空间向量及其线性运算

刷基础

1. D　【解析】选项A：由空间向量的定义知，空间向量具有大小和方向，所以任意两个空间向量都不能比较大小，故A为真命题；选项B：两个向量的模相等，其方向不一定相同，充分性不成立，两个相等向量的模一定相等，必要性成立，故B为真命题；选项C：长度为0的向量叫做零向量，只有零向量的模等于0，故C为真命题；选项D：共线的单位向量是相等向量或相反向量，故D为假命题. 故选D.

2. B　【解析】对于①，根据空间向量的定义，空间中所有的单位向量平移到同一个点为起点，它们的终点构成一个球面，故①为假命题；

板书：平面上所有单位向量平移到同一个点为起点，它们的终点构成一个圆

对于②，根据正方体的性质，上、下底面的对角线长必定相等，结合向量的方向，所以$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$，故②为真命题；

对于③，根据向量相等的定义，明显成立，故③为真命题；

板书：方向相同，模相等

对于④，当$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$时，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，但不能说$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的方向相同或相反，故④为假命题. 故选B.

名师点拨　(1)空间向量的表示方法，以及零向量、单位向量、相等向量、相反向量等概念与平面向量相同.

(2)凡涉及空间中两个向量的问题，平面向量中有关结论仍然适用于它们.

(3)空间向量是具有大小与方向的量，两个空间向量只有相等与不相等之分，而无大小之分.

3. C　【解析】依题意，$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}$. 故选C.

名师点拨　空间向量是向量从二维到三维的推广，学习空间向量可以类比平面向量，在空间中，向量加法的平行四边形法则、三角形法则，以及相关的运算律仍然适用.

4. C　【解析】在平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，由$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，根据空间向量的线性运算法则，可得$\overrightarrow{D_1B}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD_1}=\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$. 故选C.

名师点拨　向量加法满足平行四边形法则(起点相同，作平行四边形，对角线为和向量)和三角形法则(首尾相接，以最初的起点为起点，最后的终点为终点的向量为和向量).

向量减法：起点相同，终点相连，方向指向被减向量.

5. A　【解析】$\because\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}$，

$\therefore\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，$\therefore\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{DC}$且$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$，

$\therefore$四边形$ABCD$为平行四边形.

6. B　【解析】$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB_1}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB_1}|=|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB_1}|=|\overrightarrow{AB_1}|=\sqrt{2}$. 故选B.

7. (1)$\overrightarrow{AD_1}$　(2)$\overrightarrow{BD_1}$　【解析】(1)$\overrightarrow{A_1F_1}-\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{FF_1}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{F_1A_1}$

$=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB_1}+\boldsymbol{0}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED_1}=\overrightarrow{AD_1}$.

(2)$\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{E_1F_1}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{A_1E_1}$

$=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1D_1}$

$=\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{BD_1}=\boldsymbol{0}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BD_1}$.

链接教材　本题与教材第6页例1类似，考查空间向量的加减运算，在任意的空间几何体中，向量的减法都可以转化为加法，向量的加法可以根据三角形法则(首尾顺次相连)得到.

8. C　【解析】因为$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，

所以$\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC_1}=\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，故选C.

9. A　【解析】由题意可得$\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC_1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1})=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1})=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$. 故选A.

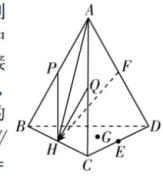
规律方法　三角形ABC的重心G为三角形三条中线的交点，同时也是中线的三等分点.

10. D　【解析】因为四边形$ABCD$为平行四边形，所以M为AC和BD的中点，所以$2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})-(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})=2\times2\overrightarrow{OM}-2\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OM}$. 故选D.

11. 【解】(1)因为G为$\triangle BCD$的重心，E为CD的中点，所以$\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$，所以

$\overrightarrow{AG}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AF}$.

(2)如图，分别取AB，AC的中点P，Q，连接PH，QH，AH，FH，因为H为BC的中点，所以$AP/\!/QH$且$AP=QH$，所以四边形$APHQ$为平行四边形，且$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}$，$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AQ}$，$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AH}$，因为$F$为$AD$的中点，所以$\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AF}$，



所以$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AH}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FH}$.

归纳总结　对空间向量进行线性运算时，要尽可能地使空间向量转化为平行四边形或三角形中的向量，运用向量加法的平行四边形法则、三角形法则，以及利用三角形的中位线、相似三角形、线段的比例等平面几何的性质，把未知向量转化为与已知向量有直接关系的向量进行运算.

12. C

思路导引　证明三点共线，借助向量共线证明即可，故解题目标是验证由三点组成的两个向量共线.

【解析】对于A，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}$，$\because\frac{1}{-5}\neq\frac{2}{6}$，$\therefore\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$不共线，即$A$，$B$，$C$三点不共线，故A不符合题意；

对于B，$\overrightarrow{BC}=-5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，$\because\frac{-5}{7}\neq\frac{6}{-2}$，$\therefore\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$不共线，即$B$，$C$，$D$三点不共线，故B不符合题意；

对于C，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=$

理想树

配套《高中必刷题》 把知识变成常识

狂K重点

COME ON
THIS IS YOUR
FIGHT



数学

学霸过三关

基础深·拓展实·疑难清

选择性必修 第一册 RJB

目录

CONTENTS



第 1 学习单元
空间向量与立体几何

1 空间向量及其运算+空间向量基本定理 …… (1)
2 空间向量的坐标与空间直角坐标系 …… (8)
3 空间中的点、直线与空间向量+空间中的平面与空间向量 …… (10)
4 用空间向量计算空间中的角、距离 …… (14)
单元高难问题 1：空间中的探索性问题 …… (20)



第 2 学习单元
平面解析几何

5 直线的倾斜角与斜率 …… (22)
6 直线的方程+两条直线的位置关系 …… (25)
7 点到直线的距离 …… (30)
单元高难问题 2：利用平面几何中的性质求解直线方程 …… (34)
8 圆及其方程 …… (35)
9 直线与圆的位置关系 …… (39)
10 圆与圆的位置关系 …… (46)
11 曲线与方程 …… (50)
单元高难问题 3：设而不求，整体代入思想在解决与圆有关问题中的应用 …… (53)
12 椭圆及其方程 …… (54)
13 双曲线及其方程 …… (59)
14 抛物线及其方程 …… (65)
15 直线与圆锥曲线的位置关系 …… (70)
单元高难问题 4：圆锥曲线中的对称、最值(取值范围)、定点、定值问题 …… (76)



当我用狂K时，我能用到什么？

知识全全get，重难拳拳K.O

- **基础深：** 全课时知识深层梳理，从预习到复习，基础稳扎稳打，体系了然于心。
- **拓展实：** 49 个解题技巧尽数奉上，常看多练才能刻入 DNA，试试升级刷题思路吧！
- **疑难清：** 高难问题也抵不住高能思维，11 个方法打破学习瓶颈，全方位突围疑难！



1 空间向量及其运算+空间向量基本定理

敲黑板

1. 空间向量的有关概念

(1)空间向量:空间中既有大小又有方向的量.

(2)向量的模(或长度):向量的大小.

(3)零向量:始点和终点相同的向量.→方向任意

(4)单位向量:模(或长度)为 1 的向量.→对于一个确定的向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$，它方向上的单位向量为 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$

(5)相等向量:大小相等、方向相同的向量.

(6)相反向量:大小相等、方向相反的向量.

(7)平行向量(共线向量):方向相同或者相反的向量.→零向量与任意向量平行

(8)共面向量:表示空间向量的有向线段通过平移之后,都能在同一平面内.

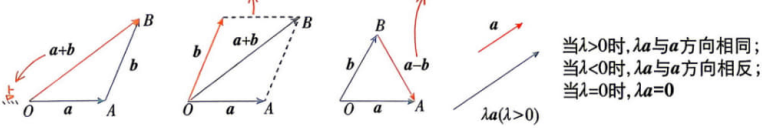
(9)方向向量:在直线 l 上取非零向量 $\boldsymbol{a}$,与 $\boldsymbol{a}$ 平行的非零向量即为直线 l 的方向向量.

2. 空间向量的线性运算

空间中任意两个向量都是共面的,它们的加、减、数乘运算类似于平面向量的加、减、数乘运算(如图).

起点重合　起点重合,指向被减向量

首尾相接,指向终点



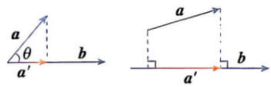
向量加法的三角形法则　向量加法的平行四边形法则　向量减法的三角形法则

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$　　$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

3. 空间向量的数量积

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$;→结果是数量,可正,可负,可为 0

$|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$是向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上投影的数量.



4. 共线向量基本定理

$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})\Leftrightarrow$存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$（$\lambda$ 为实数）.

λ 唯一　可用来证明线线平行或三点共线

推论：对空间任意一点 O，点 P 在直线 AB 上$\Leftrightarrow$存在实数 t，使得 $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$；对空间中不在直线 AB 上的一点 O，点 P 在直线 AB 上$\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$（其中 $x+y=1$）.

5. 共面向量定理

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线　唯一　既可以用来判定四点共面，也可以根据四点共面求参数

向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面$\Leftrightarrow$存在实数对 (x,y)，使 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$.

推论：已知 A,B,C 三点不共线，点 P 在平面 ABC 内$\Leftrightarrow$存在实数对 (x,y)，使 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$；或对空间任意一点 O，有 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$；或对空间中不在平面 ABC 上一点 O，有 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$（其中 $x+y+z=1$）.

6. 空间向量基本定理

存在唯一有序实数组 (x,y,z)，使得 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$.　$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面

$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 称为空间向量的一组基底，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 都称为基向量.

如果 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$，则称 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{p}$ 在基底 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 下的分解式.

K 知识深层理解

问题　如何理解空间向量？它与平面向量有什么区别和联系？

提示　(1)空间点的一个平移就是一个向量，空间中任意两个向量是共面的.

(2)向量一般用有向线段表示. 同向且等长的有向线段表示同一或相等的向量.

(3)空间的两个向量可用同一平面内的两条有向线段来表示.

空间向量是平面向量的延伸，它们没有本质区别，都是表示具有大小和方向的量，它们的运算规律完全相同. 空间向量的相关定理及公式与平面向量类似，可以类比学习. 所有的平面向量都是共面向量；空间中任意两个非零向量都是共面向量，任意三个非零向量可能共面，也可能不共面.

K 应试拓展注意

拓展1　空间向量的线性运算

把平面向量的运算推广到空间后，许多基本的运算规则没有变. 在解题过程中，要明确目标，把所求向量向三个基向量转化，并注意向量拆分和重组的技巧. 若表示的向量涉及线段的中点，可利用平行四边形法则来表示此向量，也可利用包含

印象笔记

◀(1)空间向量的加法运算满足的运算律：

①交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

②结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

(2)空间向量的数乘运算满足的运算律：

①分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$；

②结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

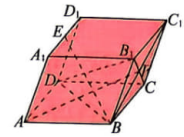
由于向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 可以移到同一个平面内，故 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$\lambda\boldsymbol{a}$，$\lambda\boldsymbol{b}$ 等也都在这个平面内，故平面向量满足的运算律，空间向量也满足.

◀**和空间向量的线性运算相关的结论**

(1)在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

要表示的向量的封闭图形，根据封闭图形各边依次构成的向量之和为零向量得到相关式子；求空间若干向量之和时，可通过平移，将它们转化为首尾相接的向量.

【例1】 如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，$E$ 为 A_1D_1 的中点，F 为 BC_1 与 B_1C 的交点.

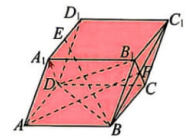


(1)用基底 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 表示向量 $\overrightarrow{DB_1}$，$\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{AF}$；

(2)在图中画出 $\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}$ 化简后的向量.

解：(1)$\overrightarrow{DB_1}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB_1}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BB_1}-\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1E}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.



(2)$\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DD_1}+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB})=\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{DA_1}$. 如图，连接 DA_1，则 $\overrightarrow{DA_1}$ 即为所求向量.

拓展2 空间向量共线与共面的有关结论与应用 二级结论

K 分视频 ○B站：必刷题调代表

	共线向量	共面向量
定义	如果表示若干空间向量的有向线段所在的直线互相平行或重合，那么这些向量叫做共线向量或平行向量	平行于同一个平面的向量，叫做共面向量
定理	对任意两个空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$存在 $\lambda\in\mathbf{R}$，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$	对不共线的两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面$\Leftrightarrow$存在唯一的有序实数对 (x,y)，使 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$
多点共线条件	A,P,B 三点共线 $\Leftrightarrow\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}(\lambda\in\mathbf{R})$ $\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{AB}(\lambda\in\mathbf{R})$ $\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$($m+n=1$，点 O 不在直线 AB 上)	A,P,B,C 四点共面 $\Leftrightarrow\overrightarrow{AP}=u\overrightarrow{AB}+v\overrightarrow{AC}(u,v\in\mathbf{R})$ $\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+u\overrightarrow{AB}+v\overrightarrow{AC}(u,v\in\mathbf{R})$ $\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$($x+y+z=1$，$A,B,C$ 三点不共线，点 O 不在平面 ABC 上)
应用	判断三点共线、两向量共线或两直线平行	判断四点共面、三向量共面或直线平行于平面

利用共面向量的充要条件可解决四点共面、线面平行等问题，要注意空间向量基底的选取，同时要重视空间向量基本定理的运用，用基底表示已知条件和所需解决问题的过程就是将几何问题转化为向量问题的过程. 通过向量的数量积运算，可证明垂直问题，亦可计算直线与平面所成角、异面直线所成角以及距离等问题.

印象笔记

有 $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$.

(2)若 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，则 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\boldsymbol{0}$.

(3)若 O 为空间中任意一点，则

①P 为线段 AB 中点的充要条件是 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$；

②若 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，则 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

◀**辨析**：对不共线的三点 A,B,C，$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}(x,y,z\in\mathbf{R})$. 设 $p:x+y+z=1$，$q:P,A,B,C$ 四点共面. 若 O 为不在平面 ABC 内的任意一点，则 $p\Leftrightarrow q$. 若 O 为空间中任意一点，则 $p\Rightarrow q$，$q\not\Rightarrow p$.

证明：充分性：$\because x+y+z=1$，$\therefore z=1-x-y$，

$\therefore\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+(1-x-y)\overrightarrow{OC}$

$=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-x\overrightarrow{OC}-y\overrightarrow{OC}$

$=x(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+y(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})+\overrightarrow{OC}$，

$\therefore\overrightarrow{CP}=x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}$，

$\therefore\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}$ 共面.

$\therefore P,A,B,C$ 四点共面.（此结论对 O 为空间中任意一点都成立）

【例2】 已知 A,B,C 三点不共线，对平面 ABC 外的任一点 O，点 M 满足 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$. 判断点 M 是否在平面 ABC 内.

解：由已知得 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OM}$，

$\therefore \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC})$，即 $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$，

$\therefore \overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$ 三个向量共面.

又$\because \overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$ 有公共点 M，

$\therefore M,A,B,C$ 四点共面，即点 M 在平面 ABC 内.

【关键技巧】证明 M,A,B,C 四点共面有两种方法：

方法一，证明 $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$ 三个向量共面，需证明 $\overrightarrow{MA}=x\overrightarrow{MB}+y\overrightarrow{MC}$ 或 $\overrightarrow{MB}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MC}$ 或 $\overrightarrow{MC}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$；

方法二，证明 $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$（点 O 在平面 ABC 外），且 $x+y+z=1$，在选择题、填空题中判断四点共面多使用这个方法，解答题还是要回归到三个向量共面，再说明四点共面.

拓展3 空间向量数量积的性质与应用

空间向量数量积的运算律

$\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，$\lambda\in\mathbf{R}$；

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$（交换律）；

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$（分配律）.

空间向量数量积的性质

（1）若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是非零向量，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

（2）若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$；若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$.

（3）$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$，$|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2\pm2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}$.

（4）若 θ 为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角，则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$.

（5）$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$.

（6）向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

空间向量数量积性质的应用

（1）求一个向量的模，可以把向量分解成几个已知向量的和，利用向量的平方等于向量的模的平方，进而求出向量的模. 这里要注意向量和向量的夹角对数量积的影响.

（2）求两直线的夹角 θ，可以先取两直线的方向向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，再求 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$，但要注意向量夹角的取值范围为 $[0,\pi]$，两直线的夹角的取值范围为 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，故 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle|$，进而得到 θ.

（3）证明两直线垂直时，可以先证明两非零向量垂直，进而证明两直线垂直.

印象笔记

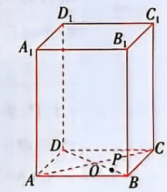
必要性：$\because P,A,B,C$ 四点共面，$\therefore$ 设 $\overrightarrow{CP}=x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}$，

①若 O 为不在平面 ABC 内的任意一点，则 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}=x(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+y(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$，

$\therefore \overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+(1-x-y)\overrightarrow{OC}$，

$\therefore$ 对 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，有 $x+y+z=1$.

②若点 O 在平面 ABC 内，则 P,A,B,C 四点共面$\nLeftrightarrow x+y+z=1$. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，设 O 为 AC 的中点，P 为 BD 上的一点，则对 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，有 $x=z$，y 随着点 P 位置的变化而变化，不一定有 $x+y+z=1$.



求空间向量的数量积的基本方法

（1）定义法：由数量积的定义 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 直接求解.

（2）基底法：根据已知条件选择恰当的基底，并用该基底表示所求的空间向量，利用数量积的定义即可求解.