名师伴行 稳稳上分

120个通法大招 162例真题+模拟 226个考点专练 42个高频易错

理想树

上分攻略

主编：杨文彬



百万粉丝博主

5000分钟上分习题课+3000分钟通法&大招课

2027

高考数学

上分攻略＋上分题＋上分解析



@圈宁CeoxNim @勇哥超级数学 @会放羊的教书匠 @嘉靖学长

超值视频免费看

开明出版社

Contents

目录

专题 1 集合与常用逻辑用语

解题通法 1 集合求参数问题的解法 …… 1
上分大招 2 二元与三元容斥原理 …… 2
上分大招 3 突破集合新定义问题 …… 3
解题通法 4 充分、必要条件判断的两个核心方法 …… 4

专题 2 不等式

上分大招 5 三种方法求基本不等式最值 …… 5
上分大招 6 “1”的代换 …… 7
解题通法 7 重要不等式链 HOT …… 8
解题通法 8 探究对勾函数的性质 …… 9
上分大招 9 柯西不等式 …… 10
上分大招 10 权方和不等式 …… 11
解题通法 11 一元二次不等式恒成立问题 HOT …… 12

专题 3 函数及其性质

解题通法 12 三个要点解决复合函数的定义域 …… 14
解题通法 13 函数的单调性与最值 …… 14
解题通法 14 根据函数单调性、奇偶性求参数 …… 15
解题通法 15 利用函数单调性解不等式 …… 17
上分大招 16 四类比较大小问题的解法 HOT …… 17
解题通法 17 函数图象的辨别与变换 …… 19
解题通法 18 判断零点个数的三种方法 …… 20
解题通法 19 已知零点求参数（范围）问题 …… 21
上分大招 20 抽象函数的图象关于直线或点对称的结论 …… 22
上分大招 21 双对称推导抽象函数的周期 …… 22
上分大招 22 常见抽象函数模型 …… 23

专题 4 导数及其应用

解题通法 23 两种类型的切线方程求法 HOT …… 25
解题通法 24 切点已知和未知的公切线问题 …… 26
解题通法 25 分析函数的单调性、极值、最值 …… 27
上分大招 26 三次函数问题 HOT …… 29
上分大招 27 构造函数比较大小 …… 31
解题通法 28 函数逆向构造 …… 32
上分大招 29 变量全分离或半分离解决恒成立问题 …… 33
上分大招 30 等价转化解决恒成立与能成立问题 …… 35

目录

Contents

上分大招31 洛必达法则 …… 36
上分大招32 端点效应 …… 37
上分大招33 指、对同构的基本模式 …… 38
解题通法34 导数在已知零点个数求参数问题中的应用 …… 39
上分大招35 引入“隐零点” …… 40
上分大招36 “放缩”的应用 …… 41
上分大招37 双变量消元、换元法转化为单变量 …… 43
上分大招38 极值点、拐点偏移问题 HOT …… 44

专题5 三角函数
解题通法39 弦切互化的原则 …… 47
解题通法40 求值、求角问题 HOT …… 48
解题通法41 图象变换先伸缩还是先平移 …… 49
解题通法42 由图象确定解析式要求的未知量 …… 50
上分大招43 整体代换思想研究三角函数的性质 HOT …… 51
上分大招44 由三角函数性质求 ω 的四大策略 …… 52

专题6 解三角形
解题通法45 边角互化的四种情况 HOT …… 55
上分大招46 射影定理的应用 …… 56
上分大招47 四种形式的三角形面积公式 …… 57

专题7 平面向量
解题通法48 三点共线的结论与推论 …… 58
上分大招49 等和线定理 …… 58
上分大招50 奔驰定理与三角形的“四心” …… 60
上分大招51 求数量积的四种方法（含极化恒等式） …… 61
解题通法52 平面向量的垂直、模及夹角 HOT …… 63

专题8 复数
解题通法53 复数的模和几何意义 …… 64
解题通法54 复数的运算 HOT …… 65
解题通法55 复数范围内一元二次方程的解法 …… 65

专题9 数列
解题通法56 判定等差数列的四种方法 …… 66
解题通法57 等差数列及其前 n 项和的性质的应用 HOT …… 66
上分大招58 邻项变号法与配方法求等差数列前 n 项和的最值 …… 68

Contents 目录

解题通法59 判定等比数列的四种方法 …… 69
解题通法60 等比数列及其前 n 项和的性质的应用 HOT …… 70
上分大招61 累加法与累乘法 …… 71
上分大招62 求通项公式的其他构造方法 …… 72
解题通法63 倒序相加法求和 …… 73
上分大招64 错位相减法求和 HOT …… 74
上分大招65 裂项相消法求和 …… 75
上分大招66 分组、并项、奇偶项求和法 …… 76
上分大招67 放缩法的应用 …… 77

专题 10 立体几何
解题通法68 求几何体表面积 …… 79
解题通法69 求几何体体积 …… 80
解题通法70 直线、平面平行的判定 HOT …… 82
解题通法71 直线、平面垂直的判定 HOT …… 83
解题通法72 求异面直线所成角 HOT …… 84
解题通法73 求直线与平面所成角 …… 85
解题通法74 二面角的找与求 …… 87
解题通法75 求空间点到平面的距离 …… 89
上分大招76 几何体的外接球模型 HOT …… 90
上分大招77 几何体的内切球 HOT …… 93
解题通法78 几何体截面的周长或面积 …… 95
上分大招79 翻折问题平面化处理 HOT …… 96
上分大招80 动点轨迹问题 …… 97
上分大招81 探索点的存在性 …… 98

专题 11 直线与圆
解题通法82 五种形式的直线方程与直线系方程 …… 99
解题通法83 三种距离公式 HOT …… 100
上分大招84 几类对称问题 …… 101
解题通法85 求圆的方程 …… 102
上分大招86 直线与圆相交的弦长问题 …… 103
上分大招87 圆的切线方程的两种类型 …… 104
上分大招88 两圆的公共弦 …… 105
上分大招89 两圆的公切线问题 …… 106

目录

Contents

专题 12　圆锥曲线

解题通法 90　求圆锥曲线的标准方程 …… 107
解题通法 91　求离心率（范围） …… 108
解题通法 92　三类焦点三角形问题 HOT …… 109
上分大招 93　圆锥曲线的第二定义 …… 111
上分大招 94　焦点弦与焦半径问题 …… 112
上分大招 95　抛物线焦点弦问题的七大结论 …… 114
上分大招 96　圆锥曲线的第三定义与斜率积 …… 116
上分大招 97　点差法与设而不求法 HOT …… 117
上分大招 98　中点弦问题 …… 118
上分大招 99　定点、定值问题 …… 119
上分大招 100　最值、范围问题 HOT …… 122

专题 13　计数原理

解题通法 101　特殊元素（位置）优先 …… 123
解题通法 102　捆绑法解决相邻问题 …… 123
解题通法 103　插空法解决不相邻问题 …… 124
解题通法 104　定序问题 …… 124
解题通法 105　均匀与不均匀分组 …… 125
解题通法 106　隔板法解决相同元素分组分配问题 …… 126
解题通法 107　直接、间接求解“至多”“至少”问题 …… 127
上分大招 108　不相邻分析涂色问题 …… 127
解题通法 109　展开式中的特定项 HOT …… 128
解题通法 110　二项展开式的系数和问题 …… 129
上分大招 111　二项展开式的系数最值问题 …… 130

专题 14　概率与统计

解题通法 112　相互独立事件的判断及其概率的求法 HOT …… 131
解题通法 113　条件概率、全概率与贝叶斯公式 …… 131
解题通法 114　超几何分布的应用 …… 132
解题通法 115　二项分布的应用 …… 133
解题通法 116　正态分布的应用 …… 134
解题通法 117　利用期望与方差作决策 …… 135
上分大招 118　线性回归分析 …… 136
上分大招 119　独立性检验 HOT …… 137
上分大招 120　概率统计与数列的综合 HOT …… 138

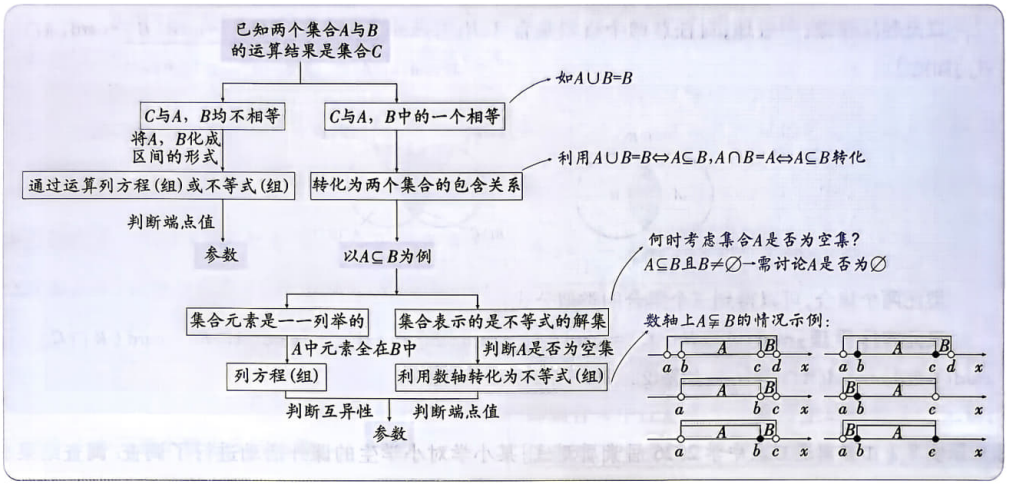
专题 1　集合与常用逻辑用语



解题通法 1　集合求参数问题的解法

码上听课　源宁CeoxNim

▸《上分题》P2 考点 3



真题示例 1　[全国新课标Ⅱ2023·2]设集合 $A=\{0,-a\}$，$B=\{1,a-2,2a-2\}$②，若 $A\subseteq B$①，则 $a=$（　　）

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{2}{3}$　　D. -1

【解析】由题意知 $0\in B$. 当 $a-2=0$ 时，即 $a=2$，此时 $A=\{0,-2\}$，$B=\{1,0,2\}$，$A\not\subseteq B$，不符合题意. 当 $2a-2=0$ 时，即 $a=1$，此时 $A=\{0,-1\}$，$B=\{1,-1,0\}$，满足 $A\subseteq B$，所以 $a=1$，故选 B.

【答案】B

找准类型按步走！

①$0\in B$；②需要讨论 $a-2$ 和 $2a-2$ 哪个是 0.

模拟示例 2　[河南顶级名校2026届月考]已知 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid a-2<x<3a\}$，若 $A\cup B=A$，则实数 a 的取值范围为_____.

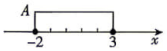
【解析】由 $A\cup B=A$，可得 $B\subseteq A$.

当 $B=\varnothing$ 时，有 $a-2\geqslant 3a$，

↳若集合 B 的左端点大于或等于右端点，则集合 B 为空集

解得 $a\leqslant -1$；

当 $B\neq\varnothing$ 时，有 $\begin{cases}a-2<3a,\\ a-2\geqslant -2,\\ 3a\leqslant 3,\end{cases}$



↳首先保证集合不为空集，其次因为集合 B 两端点都不含等号，所以 B 的端点可以与 A 的端点对应相等

解得 $0\leqslant a\leqslant 1$.

综上，a 的取值范围为 $(-\infty,-1]\cup[0,1]$.

【答案】$(-\infty,-1]\cup[0,1]$

关键点看这里！

观察题干条件，将集合的运算关系转化为集合的包含关系. 解题时首先考虑含参集合是否为空集，然后将已知集合在数轴上表示出来，数形结合分析含参集合端点的取值.

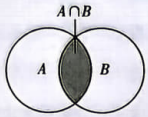
上分大招 2 二元与三元容斥原理

▸《上分题》P2 考点 4

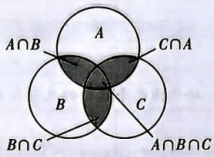
我们把含有有限个元素的集合 A 叫做有限集，用 $\mathrm{card}(A)$ 来表示有限集合 A 中元素的个数. 例如，$A=\{a,b,c\}$，则 $\mathrm{card}(A)=3$.

二元容斥原理：一般地，对任意两个有限集合 A,B，有 $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$，如图①.

与 $\mathrm{card}(A\cup B)$ 比，多算一次 $\mathrm{card}(A\cap B)$



图①



图②

类比两个集合，可以得到三个集合的类似公式：

三元容斥原理：$\mathrm{card}(A\cup B\cup C)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)+\mathrm{card}(C)-\mathrm{card}(A\cap B)-\mathrm{card}(B\cap C)-\mathrm{card}(C\cap A)+\mathrm{card}(A\cap B\cap C)$，如图②.

模拟示例 3 [江苏南通启东中学 2026 届素质测试]某小学对小学生的课外活动进行了调查. 调查结果显示：参加舞蹈课外活动的有 63 人，参加唱歌课外活动的有 89 人，参加体育课外活动的有 47 人，三种课外活动都参加的有 24 人，只选择两种课外活动参加的有 46 人，不参加其中任何一种课外活动的有 15 人，则接受调查的小学生共有 （ ）

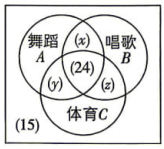
A. 120 人　　B. 144 人　　C. 177 人　　D. 192 人

【解析】不妨将参加舞蹈、唱歌、体育课外活动的小学生分别用集合 A,B,C 表示，则 $\mathrm{card}(A)=63,\mathrm{card}(B)=89,\mathrm{card}(C)=47,\mathrm{card}(A\cap B\cap C)=24$.

遇到此类问题先翻译题干，转化为元素个数的表示方法，并画出 Venn 图，方便更直观地解题

设接受调查的小学生共有 n 人，只选择舞蹈和唱歌两种课外活动的人数为 x，只选择舞蹈和体育两种课外活动的人数为 y，只选择唱歌和体育两种课外活动的人数为 z，

则 $\mathrm{card}(A\cap B)=24+x,\mathrm{card}(A\cap C)=24+y,\mathrm{card}(B\cap C)=24+z,x+y+z=46$.



攻略选对，事半功倍！

很明显，题中已知三个集合及其交集的元素个数，要求三个集合并集的元素个数，可设出总人数及只选择两种课外活动的人数，利用三元容斥原理求解.

由三元容斥原理得 $n-15=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)+\mathrm{card}(C)-\mathrm{card}(A\cap B)-\mathrm{card}(A\cap C)-\mathrm{card}(B\cap C)+\mathrm{card}(A\cap B\cap C)=63+89+47-(24+x)-(24+y)-(24+z)+24=151-(x+y+z)=105$，

解得 $n=120$，故接受调查的小学生共有 120 人. 故选 A.

【答案】A

上分大招 3 突破集合新定义问题

码上听课 廖宁CeoxNim　码上听课 B站：会放羊的数书匠
▸《上分题》P2 考点 5

(1)**看透“新”定义**:分析新定义中元素的特征,从定义中提取关键要素,明确问题本质,并将其应用到解题过程中.

(2)**明确“新”性质**:分析题目中给出的性质,如集合中元素的特性、集合之间的关系等,并将之与集合原有性质关联,根据题目要求进行推理或计算.

(3)**遵循“新”法则**:把握新的运算法则,将其转化到集合、不等式等相关运算中.

解题提示 对于比较抽象的题目,可以利用特例和赋值方法解释或理解新定义,有助于排除一些选项.

模拟示例 4 (多选)[安徽合肥一六八中学等校 2026 届月考]设非空集合 $A\subseteq\mathbf{R}$,且满足:$\forall x\in A(x\neq1$ 且 $x\neq0)$,有 $\frac{1}{1-x}\in A$. 下列说法正确的是 (　　)

A. 若 $2\in A$,则集合 A 中还有另外 2 个元素

B. 集合 A 中元素个数为 3 的倍数

C. 集合 A 中所有元素之积为 1

D. 若集合 A 中元素个数不超过 8,所有元素的和为 $\frac{14}{3}$,且 A 中有 1 个元素的平方等于所有元素的积,则 $A=\left\{-1,\frac{1}{2},2,-\frac{1}{2},3,\frac{2}{3}\right\}$

【解析】对于 A,由 $2\in A$,得 $-1\in A,\frac{1}{2}\in A,2\in A$,则 $A=\left\{2,-1,\frac{1}{2}\right\}$,A 正确;

↳由于 $2\in A$,则将 2 代入 $\frac{1}{1-x}$,得到 $-1\in A$,以此类推,发现最终按照 $2,-1,\frac{1}{2}$ 循环

对于 B,$\forall x\in A(x\neq1$ 且 $x\neq0)$,有 $\frac{1}{1-x}\in A,\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{x-1}{x}\in A,\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}}=x\in A$,

↳在 A 选项的基础上,考虑一般情况

令 $x=\frac{1}{1-x}$,得 $x^2-x+1=0$ 无解,

↳注意验证集合中元素的互异性

则 $x\neq\frac{1}{1-x}$,同理 $x\neq\frac{x-1}{x},\frac{1}{1-x}\neq\frac{x-1}{x}$,则 $\left\{x,\frac{1}{1-x},\frac{x-1}{x}\right\}\subseteq A$,即集合 A 中任意 1 个元素可生成另外 2 个元素,对任意互不生成的 2 个元素,可各自生成另外 2 个元素,以此类推,可知集合 A 中元素个数为 3 的倍数,B 正确;

↳2+2×2=6

对于 C,$x\cdot\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-1}{x}=-1$,设集合 A 中有 $3k(k\in\mathbf{N}^*)$ 个元素,则集合 A 中所有元素之积为 $(-1)^k$,C 错误;

对于 D,依题意,集合 A 中的元素个数应为 3 或 6,

↳根据 B 选项分析,元素个数只能是 3 的正整数倍

由 $x\cdot\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-1}{x}=-1$ 及集合 A 中有 1 个元素的平方等于所有元素的积,得集合 A 中应有 6 个元素,且其中 1 个元素为 -1,

由 $-1\in A$,得 $\frac{1}{2}\in A,2\in A$,又 $-1+\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$,则另外 3 个元素的和为 $\frac{19}{6}$,令 $x+\frac{1}{1-x}+\frac{x-1}{x}=\frac{19}{6}$,解得 $x=-\frac{1}{2}$ 或 $x=3$ 或 $x=\frac{2}{3}$,故 $A=\left\{-1,\frac{1}{2},2,-\frac{1}{2},3,\frac{2}{3}\right\}$,D 正确. 故选 ABD.

【答案】ABD

解题通法 4 充分、必要条件判断的两个核心方法

码上听课 圆宁CeoxNim

▸《上分题》P3 考点 6

1. 定义法

p 为命题条件，q 为命题结论.

关系式	判断	注意避坑
$p\Rightarrow q$	p 是 q 的充分条件	明确两种表述的差异： (1)p 是 q 的充分条件，则 $p\Rightarrow q$；p 是 q 的必要条件，则 $q\Rightarrow p$. 此时“是”后面的 q 为命题结论 (2)p 的充分条件是 q，则 $q\Rightarrow p$；p 的必要条件是 q，则 $p\Rightarrow q$. 此时“是”后面的 q 为命题条件，转化为常规表述即为“q 是 p 的充分条件”
$p\Rightarrow q$ 且 $q\not\Rightarrow p$	p 是 q 的充分不必要条件	
$q\Rightarrow p$	p 是 q 的必要条件	
$q\Rightarrow p$ 且 $p\not\Rightarrow q$	p 是 q 的必要不充分条件	
$p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$	p 是 q 的充要条件	
$p\not\Rightarrow q$ 且 $q\not\Rightarrow p$	p 是 q 的既不充分也不必要条件	

2. 集合法

集合 $A=\{x\mid p(x)\}$，$B=\{x\mid q(x)\}$ 分别是使命题 p 和 q 为真命题的元素所组成的集合.

关系	$A\subseteq B$	$A\supseteq B$	$A\subsetneqq B$
图示	A B　A(B) (小)　(大) $x\in A\Rightarrow x\in B$ $p\Rightarrow q$	A B　B(A) (大)　(小) $x\in A\Leftarrow x\in B$ $p\Leftarrow q$	A B (小)　(大) $x\in A\not\Leftarrow\Rightarrow x\in B$ $p\Rightarrow q$ 且 $q\not\Rightarrow p$
结论	p 是 q 的充分条件	p 是 q 的必要条件	p 是 q 的充分不必要条件
关系	$B\subsetneqq A$	$A=B$	$A\not\subseteq B$ 且 $B\not\subseteq A$
图示	A B (大)　(小) $x\in A\not\Rightarrow\Leftarrow x\in B$ $p\not\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$	A(B) $x\in A\Leftrightarrow x\in B$ $p\Leftrightarrow q$	A B A B
结论	p 是 q 的必要不充分条件	p 是 q 的充要条件	p 是 q 的既不充分也不必要条件

简记：两集合有子集关系时，小集合⇒大集合，即小集合是大集合的充分条件，大集合是小集合的必要条件.

真题示例 5 [北京 2024·5]设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是向量，则“$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$”是“$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$”的　(　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【解析】∵ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$，∴ $\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=0$，∴ $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$，则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，不能得到 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$，充分性不成立；若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$，则 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$ 成立，必要性成立. ∴ “$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$”是“$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$”的必要不充分条件. 故选 B.

【答案】B

模拟示例 6 [福建福州一中 2026 届质量检测]“$\exists x\in\mathbf{R}$，使 $ax^2-4x-3>0$”的一个充分不必要条件是　(　)

A. $a>-\frac{4}{3}$　　B. $a<-\frac{4}{3}$

C. $a\geqslant 1$　　D. $a<-\frac{4}{3}$ 或 $a\geqslant 0$

【解析】当 $a=0$ 时，$-4x-3>0$ 有解；

当 $a>0$ 时，二次函数 $y=ax^2-4x-3$ 的图象开口向上，所以 $ax^2-4x-3>0$ 有解；

当 $a<0$ 时，若 $ax^2-4x-3>0$ 有解，则 $\begin{cases}\Delta=(-4)^2-4\times(-3)a>0,\\ a<0,\end{cases}$ 解得 $-\frac{4}{3}<a<0$. 综上，$a>-\frac{4}{3}$.

因为 $[1,+\infty)\subsetneqq\left(-\frac{4}{3},+\infty\right)$，所以“$\exists x\in\mathbf{R}$，使 $ax^2-4x-3>0$”的一个充分不必要条件是 $a\geqslant 1$.

对照集合法表格内容，将充分不必要条件转化为两个集合之间的包含关系

【答案】C

专题 2　不等式



上分大招 5　三种方法求基本不等式最值

▶《上分题》P5 考点 4

码上听课 抖音：勇哥超级数学　码上听课 B站：会放羊的牧书匠

1. 拼凑法解题模型

命题方向	题目画像	解题方法
凑项	若 $x>0$，则 $x+\frac{4}{x+1}$ 的最小值为_____ 题干中的式子一般是两项的和的形式	判断哪一项能更方便地凑成与另一项的积是定值，一般都将简单的项凑成与分式中的分母相乘能抵消的式子 $x+\frac{4}{x+1}=(x+1)+\frac{4}{x+1}-1$ 单项式　分母确定　凑成与分式中分母相同的项
凑系数	已知 $0<x<\frac{3}{2}$，则 $x(3-2x)$ 的最大值为_____ 题干中的式子一般都是两项相乘或者可以转化为两项相乘的形式	主要目的是凑完系数后，能够抵消或者能够凑成要求解的式子 后一项中 x 的系数为 2，配凑目标是“和定” $x(3-2x)=\frac{2x(3-2x)}{2}\leqslant\frac{\left(\frac{2x+3-2x}{2}\right)^2}{2}$ 再利用 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ 时，可抵消未知数
分离	函数 $y=\frac{x^2+2}{x-1}(x>1)$ 的最小值为_____ 题干中的式子是分子最高次数不低于分母最高次数的分式	将式子分离成整式与分式的和，再根据分式中分母的情况对整式进行拆分 $\frac{x^2+2}{x-1}=\frac{(x^2-1)+3}{x-1}=(x+1)+\frac{3}{x-1}=(x-1)+\frac{3}{x-1}+2$ 拆成整式与分式的和　根据分式的分母调整整式

2. 换元法解题模型

命题方向	题目画像	解题方法
换元	已知实数 x,y，满足 $x^2+xy-6y^2=5$，则 $x^2+4xy+8y^2$ 的最小值是_____ 题干中式子是多项式，可以是 1 个变量也可以是多个变量，无法直接应用基本不等式	利用换元，将式子变为单项式，凑出基本不等式的使用条件，再利用基本不等式求解 设为 a　设为 b $x^2+xy-6y^2=5\rightarrow(x+3y)(x-2y)=5\rightarrow ab=5$ $x=\frac{2a+3b}{5}$　$y=\frac{a-b}{5}$ $\rightarrow x^2+4xy+8y^2=\frac{4a^2+b^2}{5}\geqslant\frac{4ab}{5}=4$

3. 消元法解题模型

命题方向	题目画像	解题方法
消元	已知 $x>0,y>0,x+2y+2xy=8$，则 $x+2y$ 的最小值为_____ 题干中的式子包含两个变量的和与积，求和的最值，提炼模型为“已知 $ax+by+cxy=d$①，求 $ax+by$（或 xy）的最值”	方法一：代数消元——通过代数运算用一个变量表示其他变量，将目标式的多个变量转化为单个变量，再利用基本不等式求解. $x+2y \xrightarrow{\text{利用 } x+2y+2xy=8 \text{ 消去 } y} x+\frac{8-x}{x+1}=x+\frac{9-(x+1)}{x+1}=x+1+\frac{9}{x+1}-2$； （凑项；再凑） 方法二：桥梁消元+整体思想——利用 $ax+by\geqslant 2\sqrt{abxy}$ 将①转化为只含有目标式 $ax+by$ 或 xy 的不等式，再求解. （$ax+by\geqslant 2\sqrt{abxy}$ 作为一个换元桥梁，可将已知式转化为与目标式有关的不等式） $8=x+2y+2xy\leqslant x+2y+\left(\frac{x+2y}{2}\right)^2$（当且仅当 $x=2y$ 时取等） （$x+2y$：即目标式；$2xy$：转化为 $x\cdot 2y$，即目标式中两项的积；$x+2y+\left(\frac{x+2y}{2}\right)^2$：只有目标式的不等式） 将 $x+2y$ 看成整体，结合 $x>0,y>0$ 解不等式 $\rightarrow x+2y\geqslant 4$ $\xrightarrow{\text{确定取等条件}}$ 由 $\begin{cases}x=2y,\\x+2y=4,\end{cases}$ 可知当且仅当 $x=2,y=1$ 时，$(x+2y)_{\min}=4$ （务必验证基本不等式中“三相等”）

4. 多次使用基本不等式的注意点

一般是求多元变量的最值问题，当目标式中有的变量间彼此独立，相互间没有制约条件，这是多次使用基本不等式的先决条件. 当多次使用基本不等式时，一定要每次都验证等号成立的条件，而且一定要注意，所有等号成立的条件必须一致.

模拟示例 1 (1)[四川成都 2025 摸底]已知 $x>0,y>0$，且 $xy+x-2y=4$①，则 $2x+y$ 的最小值是 (　　)

A. 4　　B. 5　　C. 7　　D. 9

(2)若 $x>0,y>0$，且 $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2y}=1$②，则 $4x+2y$ 的最小值为 (　　)

A. 4　　B. $4\sqrt{3}$

C. $1+2\sqrt{3}$　　D. $4+2\sqrt{3}$

攻略选对，事半功倍！

①中式子明显能通过简单换算达到消元的目的，还能看出因式分解的方向；

②中的式子不容易消掉，利用换元更合适，也可以将目标式向分式分母的代数和方向转化.

【解析】(1)**方法一：**因为 $xy+x-2y=4$，

所以 $(y+1)x=4+2y$，解得 $x=\frac{2y+2+2}{y+1}=2+\frac{2}{y+1}$，

（消元时要选择转化后能确定各式符号的变量）

故 $2x+y=4+\frac{4}{y+1}+(y+1)-1\geqslant 3+2\sqrt{\frac{4}{y+1}\cdot(y+1)}=7$，

（代入消元后再凑项）

当且仅当 $\frac{4}{y+1}=y+1$，即 $y=1,x=3$ 时等号成立.

所以 $2x+y$ 的最小值为 7.

方法二：因为 $xy+x-2y=(x-2)(y+1)+2$，所以 $2=(x-2)(y+1)$. 因为 $y>0$，所以 $y+1>0$，所以 $x-2>0$，

（出现 x，y，xy，可以考虑因式分解）

（两项乘积大于 0，其中一项大于 0，另一项一定大于 0）

故 $2x+y=2(x-2)+(y+1)+3\geqslant 2\sqrt{2(x-2)(y+1)}+3=7$，当且仅当 $2(x-2)=y+1$，即 $x=3,y=1$ 时等号成立.

（利用 $x-2$ 和 $y+1$ 两式配凑；确定取等条件）

(2)**方法一**：设 $x+1=a,x+2y=b$，

则 $x=a-1,2y=b-a+1$，且 $a>0,b>0$.

（保证“一正”的条件）

因此题目转化为已知 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，求 $4(a-1)+b-a+1$ 的最小值，

即 $4x+2y=4(a-1)+b-a+1=3a+b-3$，

而 $3a+b=(3a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=4+\frac{3a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 4+2\sqrt{\frac{3a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=4+2\sqrt{3}$，当且仅当 $\frac{3a}{b}=\frac{b}{a}$，即 $a=1+\frac{\sqrt{3}}{3}$，$b=\sqrt{3}+1$ 时等号成立.

所以 $4x+2y=3a+b-3\geqslant 4+2\sqrt{3}-3=1+2\sqrt{3}$，所以 $4x+2y$ 的最小值为 $1+2\sqrt{3}$.

方法二：$4x+2y+3=[(3x+3)+(x+2y)]\left(\frac{3}{3x+3}+\frac{1}{x+2y}\right)=4+\frac{3(x+2y)}{3x+3}+\frac{3x+3}{x+2y}\geqslant 4+2\sqrt{3}$，当且仅当 $\frac{3(x+2y)}{3x+3}=\frac{3x+3}{x+2y}$，即 $x=\frac{\sqrt{3}}{3},y=\frac{2\sqrt{3}+3}{6}$ 时，等号成立.

所以 $4x+2y\geqslant 1+2\sqrt{3}$，所以 $4x+2y$ 的最小值为 $1+2\sqrt{3}$.

【答案】(1)C　(2)C

真题示例2 [天津 2021 · 13] 若 $a>0,b>0$，则 $\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+b$ 的最小值为_____.

关键点看这里！

题干中所给的式子由三项组成，但观察到前两项可以先求一次最值，所得结果与第三项能凑成定值的形式，再求出最值.

【解析】由题意可知，$\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+b\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{a}{b^2}}+b=\frac{2}{b}+b\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{b}\cdot b}=2\sqrt{2}$，

当且仅当 $\frac{1}{a}=\frac{a}{b^2}$ 时，第一个“=”成立，

当且仅当 $\frac{2}{b}=b$ 时，第二个“=”成立，即 $a=b=\sqrt{2}$ 时，

两个等号同时成立，$\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+b$ 取得最小值，为 $2\sqrt{2}$.

【答案】$2\sqrt{2}$

上分大招6 “1”的代换

码上听课 抖音：勇哥超级数学　码上听课 B站：会放羊的教书匠

▶《上分题》P5 考点5

命题方向	题目画像	解题方法
题干中有“1”	已知 $x>0,y>0$，且 $4x+y=1$，则 $\frac{1}{x}+\frac{9}{y}$ 的最小值是_____ 题干中给的条件有等式的数值为1	(1)观察待求式，分母是独立的 x,y，则直接将条件“1”与要求的式子相乘(除)，原因是任何数与1相乘(除)结果都是它本身； (2)将待求式中的常数用已知式作等量代换
题干转化，与“1”产生联系	已知正实数 a,b 满足 $4a+b=18$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为_____ 题干中给的条件等式的数值不为1，但能转化成数值为1或常数的形式	将条件中不是“1”的式子先转化为数值是“1”或常数的形式，然后与要求的式子相乘(除)或对待求式中的常数作等量代换

“1”的代换的优势在于避免了当多次使用基本不等式时，因讨论取等条件而产生的错误.

接招吧，不难好学！

理想树

上分题



习题逐题精讲

真题、模拟题加料

只为上分打造

高考数学

CONTENTS 目录

专题 1 集合与常用逻辑用语 正文

考向 1 集合 …… 1
- 考点 1 判断元素与集合、集合与集合之间的关系 …… 1
- 考点 2 集合的交、并、补运算 …… 1
- 考点 3 集合中的含参问题 …… 易错 2 » 通法 1
- 考点 4 容斥原理的应用 …… 2 » 大招 2
- 考点 5 集合中的新定义问题 …… 2 » 大招 3

考向 2 常用逻辑用语 …… 3
- 考点 6 充分、必要条件的判断 …… 3 » 通法 4
- 考点 7 已知充分、必要条件求参数(范围) … 3
- 考点 8 全称量词命题与存在量词命题 … 易错 3
- 考点 9 已知命题真假求参数(范围) …… 易错 3

专题 2 不等式

考向 3 不等式的性质 …… 4
- 考点 1 判断不等式是否成立 …… 4
- 考点 2 作差、作商比较法的应用 …… 4
- 考点 3 利用不等式的性质求取值范围 … 易错 4

考向 4 基本不等式 …… 5
- 考点 4 利用基本不等式求最值 …… 易错 5 » 大招 5
- 考点 5 “1”的代换 …… 5 » 大招 6
- 考点 6 重要不等式链 …… 5 » 通法 7
- 考点 7 对勾函数的性质 …… 6 » 通法 8
- 考点 8 柯西不等式与权方和不等式 …… 6 » 大招 9~10

考向 5 二次函数与一元二次不等式 …… 7
- 考点 9 解一元二次不等式 …… 易错 7
- 考点 10 利用一元二次不等式恒(能)成立求参数(范围) …… 7 » 通法 11

专题 3 函数及其性质

考向 6 函数的概念 …… 8
- 考点 1 函数的定义域及值域 …… 8 » 通法 12
- 考点 2 求函数的解析式 …… 易错 8
- 考点 3 分段函数 …… 8

考向 7 函数的基本性质 …… 9
- 考点 4 判断函数的单调性(区间) … 易错 9 » 通法 13
- 考点 5 已知函数单调性求参数(范围) … 易错 9 » 通法 14
- 考点 6 利用函数单调性解不等式 … 易错 9 » 通法 15
- 考点 7 求函数的最值 …… 10 » 通法 13
- 考点 8 比较大小 …… 10 » 大招 16
- 考点 9 判断函数的奇偶性 …… 10
- 考点 10 已知函数奇偶性求参数(范围) …… 易错 11 » 通法 14
- 考点 11 函数的周期性与图象的对称性 … 11
- 考点 12 类周期函数 …… 11

考向 8 基本初等函数 …… 13
- 考点 13 指、对的运算 …… 13
- 考点 14 幂函数的图象与性质 …… 13
- 考点 15 指数函数的图象与性质 …… 13
- 考点 16 对数函数的图象与性质 …… 14

考向 9 函数的图象 …… 16
- 考点 17 函数图象的变换 …… 16 » 通法 17
- 考点 18 识别给定解析式的函数图象 …… 16
- 考点 19 已知函数图象判断解析式 …… 17

考向 10 函数与方程 …… 18
- 考点 20 判断零点所在区间 …… 18
- 考点 21 判断零点的个数 …… 18 » 通法 18
- 考点 22 已知零点个数求参数(范围) … 易错 18 » 通法 19

考向 11 函数模型及其应用 …… 20
- 考点 23 已知函数模型求解实际问题 …… 20
- 考点 24 构造函数模型求解实际问题 …… 20

考向 12 抽象函数的性质 …… 21
- 考点 25 函数性质法 …… 21 » 大招 20~21
- 考点 26 赋值法 …… 21
- 考点 27 函数模型法 …… 21 » 大招 22

专题 4 导数及其应用

考向 13 导数的运算与几何意义 …… 23
- 考点 1 导数的计算 …… 23
- 考点 2 求切线的方程 …… 23 » 通法 23
- 考点 3 公切线问题 …… 23 » 通法 24
- 考点 4 多切线问题 …… 易错 23

考向 14 导数与函数的单调性、极值、最值 …… 24
- 考点 5 讨论函数的单调性(区间) … 易错 24 » 通法 25
- 考点 6 已知函数单调性求参数(范围) … 24 » 通法 25
- 考点 7 构造函数比较大小 …… 25 » 大招 27
- 考点 8 求函数的极值(点) …… 25 » 通法 25
- 考点 9 已知函数极值情况求参数(范围) …… 易错 25 » 通法 25
- 考点 10 求函数的最值 …… 26 » 通法 25
- 考点 11 已知函数最值求参数(范围) …… 26 » 通法 25

考向 15 导数与函数的零点 …… 28
- 考点 12 判断零点的个数 …… 易错 28
- 考点 13 已知零点个数求参数(范围) …… 易错 29 » 通法 34

目录 CONTENTS

考向 16　不等式恒成立与能成立问题 …… 30
考点 14　恒成立问题 …… 30»大招 29
考点 15　能成立问题 …… 30»大招 30
考点 16　洛必达法则的应用 …… 32»大招 31
考点 17　端点效应 …… 32»大招 32
考向 17　导数与不等式 …… 34
考点 18　函数同构的应用 …… 34»大招 33
考点 19　引入“隐零点” …… 35»大招 35
考点 20　“放缩”的应用 …… 35»大招 36
考点 21　消元与换元的应用 …… 36»大招 37
考点 22　极值点偏移与拐点偏移 …… 37»大招 38
热点考向 1　导数融合其他模块 …… 40
考点 23　导数与三角函数的结合 …… 40
考点 24　导数与数列的结合 …… 41

专题 5　三角函数

考向 18　三角函数的概念与诱导公式 …… 42
考点 1　判断三角函数值的符号 …… 42
考点 2　求扇形的弧长与面积 …… 42
考点 3　利用同角三角函数的基本关系与诱导公式求值 …… 42»通法 39
考向 19　三角恒等变换 …… 43
考点 4　给角求值 …… 43»通法 40
考点 5　给值求值 …… 43»通法 40
考点 6　给值求角 …… 43»通法 40
考向 20　三角函数的图象与性质 …… 45
考点 7　三角函数的图象变换 …… 易错 45»通法 41
考点 8　根据三角函数的部分图象求解析式 …… 45»通法 42
考点 9　判断三角函数的单调区间 …… 46»大招 43
考点 10　求三角函数的最小正周期 …… 46
考点 11　求三角函数的最值 …… 46»大招 43
考点 12　三角函数对称性的应用 …… 47»大招 43
考点 13　极值、零点问题 …… 47»大招 43
考向 21　ω 的求解 …… 50
考点 14　已知单调性求 ω …… 50»大招 44
考点 15　已知对称性求 ω …… 50»大招 44
考点 16　已知最值(值域)求 ω …… 50»大招 44
考点 17　已知零点、极值点求 ω …… 51»大招 44

专题 6　解三角形

考向 22　利用正、余弦定理解三角形 …… 52
考点 1　求边或角 …… 52»通法 45
考点 2　判断三角形的形状 …… 52
考点 3　判断三角形存在与否 …… 52
考点 4　求面积或周长 …… 53»大招 47
考点 5　求取值范围或最值问题 …… 54
考点 6　中线、角平分线、比例线的应用 …… 54
考向 23　解三角形的实际应用 …… 56
考点 7　实际问题中的距离问题 …… 56
考点 8　实际问题中的高度问题 …… 56
考点 9　实际问题中的角度问题 …… 56

专题 7　平面向量

考向 24　平面向量的线性运算、基本定理及坐标运算 …… 57
考点 1　平面向量的线性运算 …… 57
考点 2　向量共线定理的应用 …… 57»通法 48
考点 3　平面向量基本定理的应用 … 易错 57
考点 4　向量的坐标运算 …… 58
考点 5　等和线定理的应用 …… 58»大招 49
考点 6　奔驰定理与三角形的“四心” …… 58»大招 50
考向 25　平面向量的数量积及其应用 …… 60
考点 7　求平面向量的数量积 …… 60»大招 51
考点 8　极化恒等式的应用 …… 60»大招 51
考点 9　求平面向量的投影向量 …… 61
考点 10　平面向量的垂直问题 …… 61»通法 52
考点 11　平面向量的模问题 …… 61»通法 52
考点 12　平面向量的夹角问题 …… 易错 62»通法 52

专题 8　复数

考向 26　复数的概念及其运算 …… 64
考点 1　求解复数的实部与虚部 …… 64
考点 2　复数的几何意义及其应用 …… 64»通法 53
考点 3　复数的四则运算 …… 64»通法 54
考点 4　共轭复数 …… 64
考点 5　复数的模 …… 65»通法 53
考点 6　复数中的参数问题 …… 65»通法 55
考点 7　复数的三角表示 …… 65

CONTENTS 目录

专题 9 数列

考向 27 数列的概念及其表示法 …… 66
考点 1 a_n 与 S_n 的关系 …… 易错 66
考点 2 数列的递推关系 …… 66
考点 3 数列的单调性 …… 66
考点 4 数列的最大(小)项 …… 易错 67
考点 5 周期数列 …… 67
考向 28 等差数列及其前 n 项和 …… 68
考点 6 等差数列基本量的运算 …… 68
考点 7 等差数列的判定与证明 …… 68»通法 56
考点 8 等差数列的性质的应用 …… 69»通法 57
考点 9 等差数列前 n 项和的最值问题 …… 69»大招 58
考向 29 等比数列及其前 n 项和 …… 71
考点 10 等比数列基本量的运算 …… 71
考点 11 等比数列的判定与证明 …… 易错 71»通法 59
考点 12 等比数列的性质的应用 …… 72»通法 60
考向 30 求数列通项公式的方法 …… 74
考点 13 a_n 与 S_n 的关系 …… 74
考点 14 累加法与累乘法 …… 74»大招 61
考点 15 其他构造法 …… 75»大招 62
考向 31 数列求和的方法 …… 77
考点 16 倒序相加法 …… 易错 77»通法 63
考点 17 错位相减法 …… 77»大招 64
考点 18 裂项相消法 …… 78»大招 65
考点 19 分组、并项求和法 …… 78»大招 66
考向 32 数列不等式 …… 80
考点 20 求参数(范围) …… 80
考点 21 证明不等式 …… 80
考点 22 数列放缩 …… 80»大招 67
热点考向 2 数列融合其他模块 …… 82
考点 23 数列与函数、导数融合 …… 82
考点 24 数列与概率融合 …… 83
热点考向 3 数列的新定义问题 …… 84

专题 10 立体几何

考向 33 空间几何体的结构、表面积与体积 …… 85
考点 1 空间几何体的结构特征 …… 85
考点 2 空间几何体的表面积 …… 易错 85»通法 68
考点 3 空间几何体的体积 …… 86»通法 69
考向 34 空间点、线、面的位置关系 …… 87
考点 4 共点、共线、共面问题 …… 87
考点 5 空间点、线、面位置关系的判断 …… 87
考向 35 直线、平面平行的判定与性质 … 88
考点 6 线面平行的判定与性质 …… 88»通法 70
考点 7 面面平行的判定与性质 …… 89»通法 70
考向 36 直线、平面垂直的判定与性质 … 91
考点 8 线面垂直的判定与性质 …… 91»通法 71
考点 9 面面垂直的判定与性质 …… 92»通法 71
考向 37 空间角和距离 …… 94
考点 10 异面直线所成角 …… 易错 94»通法 72
考点 11 直线与平面所成角 …… 94»通法 73
考点 12 二面角与面面角 …… 易错 95»通法 74
考点 13 求空间距离 …… 96»通法 75
考向 38 球的切、接问题 …… 99
考点 14 几何体的外接球 …… 易错 99»大招 76
考点 15 几何体的内切球 …… 99»大招 77
考点 16 几何体的棱切球 …… 100
考向 39 截面、翻折问题 …… 102
考点 17 判断截面形状 …… 102
考点 18 求截面面积 …… 102»通法 78
考点 19 翻折问题 …… 103»大招 79
考向 40 探索性问题 …… 105
考点 20 探索动点问题 …… 105»大招 80
考点 21 探索点的存在性 …… 105»大招 81
考点 22 探索参数问题 …… 106

专题 11 直线与圆

考向 41 直线的方程、圆的方程 …… 108
考点 1 直线的倾斜角与斜率 …… 易错 108
考点 2 求直线的方程 …… 易错 108»通法 82
考点 3 两直线位置关系问题 …… 易错 108
考点 4 距离公式的应用 …… 108»通法 83
考点 5 对称问题 …… 109»大招 84
考点 6 求圆的方程 …… 109»通法 85
考点 7 与圆有关的最值问题 …… 109
考向 42 直线与圆、圆与圆的位置关系 …… 111
考点 8 判断直线与圆的位置关系 …… 111
考点 9 直线与圆相切问题 …… 易错 111»大招 87
考点 10 直线与圆相交的弦长 …… 111»大招 86
考点 11 圆与圆的位置关系 …… 易错 112»大招 88~89

专题 12 圆锥曲线

考向 43 椭圆 …… 114
考点 1 椭圆定义的应用 …… 易错 114

目录 CONTENTS

考点 2 求椭圆的标准方程 …… 114 通法 90
考点 3 椭圆的几何性质 …… 114 通法 91
考点 4 直线与椭圆的位置关系 …… 115
考向 44 双曲线 …… 118
考点 5 双曲线定义的应用 …… 118
考点 6 求双曲线的标准方程 …… 118 通法 90
考点 7 双曲线的渐近线方程 …… 118
考点 8 双曲线的几何性质 …… 119 通法 91
考点 9 直线与双曲线的位置关系 …… 119
考向 45 抛物线 …… 122
考点 10 抛物线的定义及标准方程 …… 122 通法 90
考点 11 抛物线的几何性质 …… 122
考点 12 抛物线的焦点弦问题 …… 122 大招 95
考点 13 直线与抛物线的位置关系 …… 123
考向 46 圆锥曲线中的焦点三角形与焦点弦 …… 125
考点 14 圆锥曲线中的焦点三角形问题 …… 125 通法 92
考点 15 圆锥曲线中的焦半径公式的应用 …… 125 大招 94
考向 47 直线与圆锥曲线的位置关系 …… 126
考点 16 圆锥曲线中的中点弦与斜率积 … 126 大招 96,98
考点 17 点差法与设而不求法 …… 127 大招 97
考向 48 圆锥曲线的综合问题 …… 129
考点 18 定点、定值、定直线问题 …… 129 大招 99
考点 19 最值、范围问题 …… 130 大招 100
考点 20 存在性问题 …… 131

专题 13 计数原理

考向 49 两个计数原理与排列组合 …… 133
考点 1 计数原理的简单应用 …… 133
考点 2 特殊元素(位置)优先问题 …… 133 通法 101
考点 3 捆绑法解决相邻问题 …… 易错 133 通法 102
考点 4 插空法解决不相邻问题 …… 133 通法 103
考点 5 定序问题 …… 133 通法 104
考点 6 分组分配问题 …… 易错 134 通法 105
考点 7 隔板法解决相同元素分配问题 … 134 通法 106
考点 8 “至多”“至少”问题 …… 134 通法 107
考点 9 涂色问题 …… 134 大招 108
考向 50 二项式定理 …… 135
考点 10 形如$(a+b)^n$的展开式中的特定项或特定项系数 …… 135 通法 109
考点 11 形如$(a+b)^m(c+d)^n$的展开式中的特定项或特定项系数 …… 135 通法 109
考点 12 形如$(a+b+c)^n$的展开式中的特定项或特定项系数 …… 135 通法 109
考点 13 二项展开式的系数和问题 … 易错 136 通法 110
考点 14 二项展开式的系数最值问题 …… 136 大招 111

专题 14 概率与统计

考向 51 随机事件的概率及古典概型 …… 137
考点 1 随机事件的频率与概率 …… 137
考点 2 计算古典概型概率 …… 137
考点 3 对立事件与互斥事件的概率 …… 137
考向 52 相互独立事件的概率、条件概率及全概率公式 …… 138
考点 4 相互独立事件的判断及其概率的求解 …… 138 通法 112
考点 5 求条件概率 …… 138 通法 113
考点 6 全概率公式的应用 …… 139 通法 113
考向 53 离散型随机变量及其分布列、期望与方差 …… 140
考点 7 求离散型随机变量的分布列、期望与方差 …… 140
考点 8 决策性问题 …… 141 通法 117
考向 54 超几何分布、二项分布和正态分布 …… 142
考点 9 超几何分布的应用 …… 142 通法 114
考点 10 二项分布的应用 …… 142 通法 115
考点 11 正态分布的应用 …… 143 通法 116
考向 55 随机抽样与用样本估计总体 …… 144
考点 12 分层随机抽样 …… 144
考点 13 统计图表 …… 144
考点 14 中位数、众数、方差、极差、百分位数 …… 145
考向 56 成对数据的统计分析 …… 146
考点 15 相关关系的判断 …… 146
考点 16 回归分析 …… 146 大招 118
考点 17 独立性检验 …… 147 大招 119
考向 57 概率统计与其他知识的综合应用 …… 148
考点 18 概率统计与函数、导数的综合问题 …… 148
考点 19 概率统计与数列的综合问题 …… 148 大招 120



逐题讲 错题本

考向1 集合

答案 P149

刷考点

考点1 判断元素与集合、集合与集合之间的关系

1. [重庆渝北中学等校2026届联考]已知集合$U=\{0,2,3,5,7\}$,且$\complement_U A=\{2,5,7\}$,则下列结论错误的是 ( )

A. $2\in A$ B. $3\in A$

C. $5\notin A$ D. $7\notin A$

2. [安徽A10联盟2026届调研]已知全集$U=\{x\in\mathbf{Z}\mid -3.5<x<4\}$,集合$A=\{-3,-1,1,3\}$,则$\complement_U A$的子集个数为 ( )

A. 1 B. 4

C. 8 D. 16

3. [湖北部分校2026届月考]已知$\{a,b\}\subseteq\{-1,0,1,2,3,4\}$,$(a,b)\in\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$,则$(a,b)$可能的取值的个数为 ( )

A. 5 B. 6

C. 7 D. 8

4. [湖南师大附中2025期中]已知集合$S=\left\{x\middle|x=m+\frac{1}{12},m\in\mathbf{Z}\right\}$,$P=\left\{x\middle|x=\frac{n}{3}+\frac{1}{12},n\in\mathbf{Z}\right\}$,$Q=\left\{x\middle|x=\frac{k}{3}-\frac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$,则$S,P,Q$之间的关系是 ( )

A. $S\subseteq P\subseteq Q$ B. $S\subseteq P=Q$

C. $S=P\subseteq Q$ D. $P\subseteq Q\subseteq S$

5. [安徽部分学校2025联考]已知集合$A=\{x\mid 4ax^2+4(a+2)x-1=0\}$中只有一个元素,则实数$a$的所有可能取值组成的集合为_____.

考点2 集合的交、并、补运算

6. [全国二2025·3]已知集合$A=\{-4,0,1,2,8\}$,$B=\{x\mid x^3=x\}$,则$A\cap B=$ ( )

A. $\{0,1,2\}$ B. $\{1,2,8\}$

C. $\{2,8\}$ D. $\{0,1\}$

7. 已知集合$U=\{1,2,3,4,5\}$,$A=\{1,3\}$,$B=\{1,2,5\}$,则$A\cup(\complement_U B)=$ ( )

A. $\{1,3,4\}$ B. $\{1,3\}$

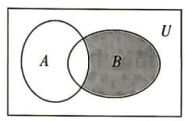
C. $\{1,2,5\}$ D. $\{1,2,4,5\}$

8. [河北邯郸2026届调研]已知集合$M=\{x\mid 2^{-x}<1\}$,$N=\{x\mid \log_x 2>0\}$,若全集$U=\mathbf{R}$,则$M\cap(\complement_U N)=$ ( )

A. $(-\infty,1)$ B. $[1,+\infty)$

C. $(-1,1)$ D. $(0,1]$

9. [江苏扬大附中2025期中]已知全集$U=\mathbf{R}$,集合$A=\{x\mid x(x-3)>0\}$,$B=\{x\mid \log_2(x-1)<2\}$,则图中阴影部分所表示的集合为 ( )



A. $\{x\mid 3\leqslant x<5\}$ B. $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 3\}$

C. $\{x\mid 1<x<3\}$ D. $\{x\mid 1<x\leqslant 3\}$

10. 设集合$U=\{1,2,3,4,5\}$,若$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\{1,2,3\}$,则$A\cap B=$ ( )

A. $\{4,5\}$ B. $\{3,4,5\}$

C. $\{1,2,3\}$ D. $\varnothing$

11. [江西赣州二十四校2025联考]设全集$U=\mathbf{Z}$,集合$A=\{x\mid x=4k+1,k\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{x\mid x=4k-1,k\in\mathbf{Z}\}$,则$C=\{x\mid x=2k,k\in\mathbf{Z}\}=$ ( )

A. $A\cup(\complement_U B)$ B. $B\cup(\complement_U A)$

C. $\complement_U(A\cup B)$ D. $\complement_U(A\cap B)$

错题记录

重点总结

考点3 集合中的含参问题 解题通法1

12. 易错题 [云南昆明一中等校2026届联考]已知集合$A=\{-1,1\}$,集合$B=\{x\mid ax+1=0\}$,若$B\subseteq A$,则由实数a组成的集合为 ( )

A. $\{-1\}$ B. $\{1\}$

C. $\{-1,1\}$ D. $\{0,-1,1\}$

13. 易错题 [河南郑州一中2026届期中]已知集合$A=\{1,3,a^2\}$,$B=\{1,a+2\}$,若$A\cap B=B$,则$a=$ ( )

A. 1 B. -1

C. 2 D. -2

14. 易错题 已知集合$A=\{x\mid x^2-4\leqslant 0\}$,$B=\{x\mid |x-a|<1\}$,若$B\subseteq A$,则$a$的取值范围是 ( )

A. $(-1,1)$ B. $[-1,1]$

C. $[-1,1)$ D. $(-1,1]$

15. [湖南长沙雅礼中学2025月考]设集合$A=\{x\mid (x+1)(x-4)<0\}$,$B=\{x\mid 2x+a<0\}$,且$A\cap B=\{x\mid -1<x<3\}$,则$a=$ ( )

A. 6 B. 4

C. -4 D. -6

16. (多选)[安徽A10联盟2026届诊断]已知$a\in\mathbf{R}$,集合$M=\{x\mid a<x<a+2\}$,$N=\{x\mid x<0$或$x>1\}$,则下列结论中正确的是 ( )

A. 若$a=0$,则$M\cap N=\{x\mid 1<x<2\}$

B. 若$a\geqslant 1$,则$M\subseteq N$

C. 若$M\cup N=\mathbf{R}$,则$-1\leqslant a\leqslant 0$

D. 不存在实数a,使得$M\cap N=\varnothing$

考点4 容斥原理的应用 上分大招2

17. 设$\mathrm{card}(A)$表示有限集合A中元素的个数,则"$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)$"是"$A\cap B=\varnothing$"的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

18. [北京北师大二附中2025期中]"运动改造大脑",为了增强身体素质,某班学生积极参加学校组织的体育特色课堂,课堂分为球类项目A、径赛项目B、其他健身项目C. 该班有25名同学选择球类项目A,20名同学选择径赛项目B,18名同学选择其他健身项目C;其中有6名同学同时选择A和B,4名同学同时选择A和C,3名同学同时选择B和C. 若全班同学每人至少选择一类项目且没有同学同时选择三类项目,则这个班同学人数是 ( )

A. 51 B. 50 C. 49 D. 48

19. [吉林一中2026届质量检测]高一(1)班共有28名同学,有15人观看了电影a,有8人观看了电影b,有14人观看了电影c,有3人同时观看了电影a和电影b,有3人同时观看了电影a和电影c,没有人同时观看三部电影且每人至少看了一部电影,则只观看了电影c的人数为 ( )

A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

考点5 集合中的新定义问题 上分大招3

20. 设集合$S,T,S\subseteq\mathbf{N}^*,T\subseteq\mathbf{N}^*,S,T$中至少有2个元素,且$S,T$满足:①对于任意的$x,y\in S$,若$x\neq y$,则$xy\in T$;②对于任意的$x,y\in T$,若$x<y$,则$\frac{y}{x}\in S$. 下列命题正确的是 ( )

A. 若S有4个元素,则$S\cup T$有7个元素

B. 若S有4个元素,则$S\cup T$有6个元素

C. 若S有3个元素,则$S\cup T$有5个元素

D. 若S有3个元素,则$S\cup T$有4个元素

21. [安徽名校2026届月考]定义集合A与B的差集为$A-B=\{x\mid x\in A$,且$x\notin B\}$,已知集合$P=\{x\mid x^2-3x+2\leqslant 0\}$,$Q=\{x\mid a<x\leqslant a+4\}$,若$P-Q=\varnothing$,则实数$a$的取值范围是_____.

22. [江苏盐城七校2026届检测]设A是实数集的非空子集,称集合$B=\{uv\mid u,v\in A$且$u\neq v\}$为集合A的生成集. 当$A=\{1,3,5\}$时,写出集合A的生成集B为_____;记集合M中元素个数为$\mathrm{card}(M)$,若A是由5个正实数构成的集合,则$\mathrm{card}(B)$的最小值为_____.

错题记录

重点总结

逐题讲 错题本

考向2 常用逻辑用语

答案 P150

刷考点

考点6 充分、必要条件的判断 解题通法4

1. [湖北重点高中2026届联考]“$\ln x>\ln y$”是“$e^x>e^y$”的 ( )
A. 充要条件
B. 既不充分也不必要条件
C. 必要不充分条件
D. 充分不必要条件

2. [广东深圳多校2026届联考]已知函数$f(x)=\tan x$,则“$x_0=k\pi,k\in\mathbf{Z}$”是“$f(x)$的图象关于点$(x_0,0)$对称”的 ( )
A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

3. [四川绵阳南山中学2026届一诊]若l,m是两条不同的直线,m平行于平面α,则“$l\perp m$”是“$l\perp\alpha$”的 ( )
A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

4. [福建龙岩一中等校2026届联考]已知数列$\{a_n\}$的首项为a_1,对于任意的$n\in\mathbf{N}^*$都有$a_{n+2}-a_n=1$,则“$\{a_n\}$为递增数列”是“$a_1<a_2<a_3<a_4$”的 ( )
A. 必要不充分条件
B. 充分不必要条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

考点7 已知充分、必要条件求参数(范围)

5. [山东省实验中学2025质量检测]“$\forall x\in\mathbf{R}$,使得关于x的不等式$x^2-ax+a>0$恒成立”的一个充分不必要条件是 ( )
A. $a>-1$ B. $0<a<1$
C. $0<a<5$ D. $0<a<4$

6. [河南百师联盟2026届调研]若“$x<a$”是“$x^2-4x+3<0$”的必要不充分条件,则实数a的取值范围是 ( )
A. $(-\infty,1]$ B. $(-\infty,1)$
C. $[3,+\infty)$ D. $(3,+\infty)$

考点8 全称量词命题与存在量词命题

7. [重庆部分名校2025联考]已知命题$p:\forall x<1,x^2<1$,命题$q:\exists x\leqslant 0,x^3+2\geqslant 0$,则 ( )
A. $\neg p:\forall x\geqslant 1,x^2\geqslant 1$ B. $\neg p:\exists x<1,x^2\geqslant 1$
C. $\neg q:\forall x\geqslant 0,x^3+2<0$ D. $\neg q:\exists x\geqslant 0,x^3+2<0$

8. 易错题 [全国新课标Ⅱ2024·2]已知命题$p:\forall x\in\mathbf{R},|x+1|>1$;命题$q:\exists x>0,x^3=x$.则 ( )
A. p和q都是真命题
B. $\neg p$和q都是真命题
C. p和$\neg q$都是真命题
D. $\neg p$和$\neg q$都是真命题

9. 新定义 [河南郑州2025月考]哥德巴赫猜想认为任一大于2的偶数都可写成两个质数之和.定义P为全体质数的集合,则以下命题中和哥德巴赫猜想不等价的是 ( )
A. 不存在$n_0\in\mathbf{N}\cap[2,+\infty)$,$\forall p_1\in P,\forall p_2\in P,p_1+p_2\neq 2n_0$
B. $\{p_1+p_2\mid p_1\in P,p_2\in P\}\supseteq\{2n\mid n\in\mathbf{N}\cap[2,+\infty)\}$
C. $\left\{x\,\middle|\,p_1\in P,p_2\in P,x=p_1+p_2\text{且}\frac{x}{2}\notin\mathbf{N}\right\}=\varnothing$
D. $\forall m\in\mathbf{N},2m\leqslant 2$或$P\cap\{2m-p\mid p\in P\}\neq\varnothing$

考点9 已知命题真假求参数(范围)

10. 易错题 命题“$\forall x\in(1,2),x^2-a>0$”为真命题的一个必要不充分条件是 ( )
A. $a\leqslant 1$ B. $a<1$ C. $a<0$ D. $a<2$

11. [江苏泰州二中2025月考]已知命题$P:x>1,y>0$满足$\frac{2}{x-1}+\frac{1}{y}=1$,且$x+2y>m^2+2m+1$恒成立,命题$Q$:“$\exists x\in\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$,使$x+1+m\geqslant 0$”,若命题$P$为真命题,命题$Q$为假命题,则实数$m$的取值范围是 ( )
A. $\{m\mid -4<m<-3\}$ B. $\{m\mid -3\leqslant m\leqslant 2\}$
C. $\{m\mid -4\leqslant m\leqslant 2\}$ D. $\{m\mid m\geqslant -3\}$

错题记录

重点总结



考向3 不等式的性质

答案 P151

刷考点

考点1 判断不等式是否成立

1. [河北衡水2025月考]下列命题为真命题的是（　　）

A. 若 $a>b>c>0$，则 $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$

B. 若 $a>b>0$，$c<0$，则 $\frac{c}{a}<\frac{c}{b}$

C. 若 $a>b>0$，则 $ac^2>bc^2$

D. 若 $a>b$，则 $a>\frac{a+b}{2}>b$

2. 已知 $c<-1<b<a<0$，则（　　）

A. $c^3+c>0$　　B. $\frac{1}{b-c}<\frac{1}{a-c}$

C. $bc<ac$　　D. $\frac{1}{b+c}>\frac{1}{a+c}$

3. (多选)[江苏无锡2026届期中]若 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则下列不等式正确的是（　　）

A. $|a|>|b|$　　B. $\sqrt{-a}<\sqrt{-b}$

C. $a+b>ab$　　D. $a^2-a<b^2-b$

考点2 作差、作商比较法的应用

4. [重庆部分名校2025联考]设 $M=2a^2+5a+3$，$N=(a+1)(a+2)$，则 M 与 N 的大小关系为（　　）

A. $M>N$　　B. $M<N$

C. $M\leqslant N$　　D. $M\geqslant N$

5. 设 $a=0.1e^{0.2}$，$b=\frac{1}{10}$，$c=0.2e^{0.1}$，则下列选项正确的是（　　）

A. $c<b<a$　　B. $b<a<c$

C. $b<c<a$　　D. $a<c<b$

6. (多选)[江西多校2026届联考]已知 $a>b>c$，$a+b>0$，$a+c<0$，则下列不等式一定成立的是（　　）

A. $a^2<c^2$　　B. $\frac{b}{a}>\frac{c}{b}$

C. $ab>ac$　　D. $\frac{a}{a+c}<\frac{b}{b+c}$

7. (多选)[河南郑州一中等校2026届开学考]已知 $a>b>0>c>d$，则（　　）

A. $a+c>b+d$　　B. $ac>bd$

C. $a^2-c^2>b^2-d^2$　　D. $a^2+\frac{1}{a^2}>b^2+\frac{1}{b^2}$

8. (多选)[山东名校联盟2026届阶段检测]已知 $x>y>0$，则（　　）

A. $\frac{x+1}{y+1}>\frac{x}{y}$　　B. $x^2>y^2$

C. $\frac{1}{\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{y}}$　　D. $\frac{1}{x}<\frac{1}{x-y}$

考点3 利用不等式的性质求取值范围

9. [河北邯郸2025期中]已知 $2<a<3$，$-2<b<-1$，则 $2a-b$ 的取值范围为（　　）

A. $(0,2)$　B. $(2,5)$　C. $(5,8)$　D. $(6,7)$

10. [江西景德镇一中2024月考]已知 $b<a<-3b$，则 $\left|\frac{a}{b}\right|$ 的取值范围为（　　）

A. $(0,3)$　B. $[0,3)$　C. $(3,+\infty)$　D. $(1,3)$

11. (多选)[浙江温州中学2025期中]已知 $1\leqslant x\leqslant 2$，$3\leqslant y\leqslant 4$，则（　　）

A. $2x+y$ 的最小值是4

B. $y-x$ 的最小值是1

C. xy 的最大值是8

D. $\frac{x}{y}$ 的最大值是 $\frac{2}{3}$

12. 易错题 [河南多校2026届质量检测]已知 $-3\leqslant x+y\leqslant 1$，$0\leqslant x-y\leqslant 2$，则 $3x-y$ 的取值范围为_____.

错题记录

重点总结

考向4 基本不等式

答案 P152

刷考点

考点4 利用基本不等式求最值 上分大招5

1. 易错题 [湖北武汉2025月考]若 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right]$，则 $2x+\frac{1}{2x-1}$ 的最小值为 ( )

A. 1　　B. 2

C. $2\sqrt{2}$　　D. 3

2. 易错题 [辽宁沈阳部分校2026届联考]已知 $a>0,b>0$，则 $\frac{(a+3)^2}{b^2}+\frac{12b^2}{a}$ 的最小值为 ( )

A. 4　　B. 6

C. 12　　D. 24

3. 已知 $x>0,y>0$，若 $x+y+xy=3$，则 xy 的最大值为 ( )

A. 1　　B. $\sqrt{2}$

C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

4. [广东深圳多校2026届联考]若实数 x,y 满足 $(\sqrt{x^2+4}+x)(\sqrt{y^2+4}+y)=4$，则 4^x+2^{1+2y} 的最小值为_____.

考点5 “1”的代换 上分大招6

5. [福建宁德2026届期中]已知正实数 a,b 满足 $a+b=4$，则 $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 ( )

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$

C. 1　　D. 4

6. [江苏无锡六校2026届调研]已知实数 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=1$，则 $\frac{a}{2b}+\frac{1}{a}$ 的最小值是 ( )

A. $\sqrt{2}+1$　　B. $\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{2}+1$　　D. $2\sqrt{2}$

7. 下列结论正确的是 ( )

A. 若 $a>0,b>0$，且 $a+4b=1$，则 ab 的最大值为 $\frac{1}{4}$

B. 若正实数 a,b 满足 $ab=a+b+3$，则 ab 的最小值为20

C. 若 a,b 为正实数，且 $a+2b=2$，则 $\frac{4}{a}+\frac{a}{b}$ 的最小值为6

D. 若 $a,b\in\mathbf{R},ab>0$，则 $\frac{a^4+4b^4+1}{ab}$ 的最小值为3

8. (多选)[河南部分校2026届联考]已知 a,b 均为正实数，且 $a+2b=ab$，则 ( )

A. $ab\geqslant 8$　　B. $2a+b\geqslant 10$

C. $\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant 1$　　D. $\frac{a}{a-2}+\frac{b}{b-1}\geqslant 4$

9. [陕西西安高新一中2025开学考试]已知实数 $a>0,b>2$，且 $\frac{1}{a+1}+\frac{2}{b-2}=\frac{1}{2}$，则 $2a+b$ 的最小值是_____.

10. [江苏常州一中等校2026届联考]数据 $x_1,x_2,\cdots,x_5$ 的平均数为 $\frac{1}{a}$，数据 $x_6,x_7,\cdots,x_{20}$ 的平均数为 $\frac{1}{b}$，其中正数 a,b 满足 $a+b=2$，则样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_{20}$ 的平均数的最小值为_____.

考点6 重要不等式链 解题通法7

11. [北京2025·6]已知 $a>0,b>0$，则 ( )

A. $a^2+b^2>2ab$　　B. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{1}{ab}$

C. $a+b>\sqrt{ab}$　　D. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leqslant\frac{2}{\sqrt{ab}}$

错题记录

重点总结