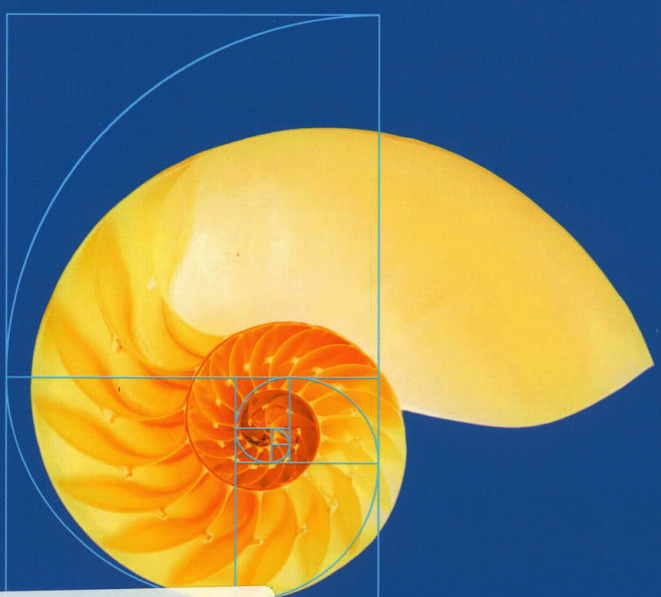
育甲高考
YU JIA GAO KAO

育甲高考名师系列图书

何·帅·数·学

30天速记
高中数学知识

主　编　师致远
副主编　何　帅



- 知识全面
- 直击考点
- 科学规划
- 速记口诀
- 快速提分

育甲教育 YU JIA JIAO YU
读者服务平台
刮开图层
扫码验真伪
Q0060237273

安徽师范大学出版社
ANHUI NORMAL UNIVERSITY PRESS

前言

在高中学习的征程中，数学始终是无数同学的“拦路虎”——有人深陷公式定理的记忆迷宫，背了又忘、记了混淆；有人面对零散的知识点无从下手，难以构建完整的知识体系；有人临近考试才发现基础薄弱，想高效补漏却找不到方向。

高考数学的难度比例早已明确，基础题与中档题占据大多数，想要拿稳这些分，就要牢牢掌握核心知识。“速记”并非死记硬背，而是在理解的基础上，用科学的方法梳理知识、强化记忆，让高中数学知识变得清晰、有条理、易掌握。我们编写这本《30 天速记高中数学知识》的初衷，就是打破“数学难记、记了无用”的误区，为每一位渴望突破数学瓶颈的同学，提供一份高效、系统、可落地的 30 天记忆方案，帮助大家在短时间内夯实基础、梳理脉络，轻松应对日常学习与高考备考。

结合高中数学的知识特点与记忆规律，我们摒弃了传统教辅“重刷题、轻记忆”“重难点、轻基础”的弊端，以“30 天”为时间周期，将高中数学的核心知识进行拆解、整合，兼顾系统性与实用性，让每一位同学都能跟着节奏，每天进步一点，逐步实现知识的全面掌握与熟练记忆。本书的内容紧扣高中数学教材脉络与高考考点，将 30 天的学习任务科学划分，每日设定明确的记忆目标与核心内容，将概念、定理、性质、结论、方法、步骤六大核心学习维度融入每一天的学习。

需要强调的是，“速记”的核心是“高效记忆 + 灵活运用”。为了让大家更好地使用本书，给出以下几点使用建议，让 30 天的学习更具针对性：

第一，严格遵循 30 天计划，循序渐进，不急于求成。每天按照本书的安排，完成当天的记忆任务，不要跳过任何一个知识点，也不要提前推进过多内容。每天先通读当天的知识点解读，理解公式、定理的推导逻辑，再结合记忆技巧强化记忆，确保当天的知识当天消化、当天记牢。可以采用“首次记忆 + 重复记忆”的模式，每天晚上睡前回想一遍当天所学，第二天早上再快速复习，提高记忆留存率。

第二，注重理解，拒绝死记硬背。高中数学的公式、定理并非孤立存在，每一个公式的推导、每一个定理的证明，都有其逻辑依据。学习时，不要只盯着“记结论”，更要理解“为什么”。同时，可结合形象记忆法，比如用函数图象辅助记忆

函数性质，用表格对比易混淆知识点，减轻记忆负担。

第三，善用记忆技巧，做好标记与复盘。本书为多个知识点搭配速记口诀，大家在学习时要熟练运用，同时可以根据自己的记忆习惯，补充适合自己的记忆方法。对于易混淆、难记忆的知识点，做好标记，每天复习时重点关注；每 5 天进行一次小复盘，回顾前 5 天的知识，查漏补缺，强化记忆；30 天结束后，进行全面复盘，梳理知识网络，确保知识的系统性。

第四，结合练习，强化记忆效果。记忆的最终目的是运用，每天学习完知识点后，可搭配 1 ~ 2 道基础题进行练习，不需要做难题、偏题，重点是检验记忆效果，熟悉知识点的运用场景，形成条件反射。

第五，保持耐心，坚持到底。30 天的速记之路，或许会枯燥，或许会有困难，可能会出现“记了又忘”的情况，但请相信，这是记忆的正常过程，只要坚持每天学习、每天复习，运用科学的记忆方法，不断强化，就一定能看到进步。不要因为一时的困难而放弃，也不要因为暂时的遗忘而焦虑，坚持下去，你会发现，高中数学知识其实并没有那么难记，甚至会爱上这种“每天都有新收获”的感觉。

我们深知，每一位同学都在为了梦想奋力拼搏，而数学，既是拦路虎，也是提分的关键。编写本书的目的，就是希望用简洁、高效、贴合需求的方式，帮助大家突破数学记忆的瓶颈，夯实基础、提升自信，让数学不再成为备考路上的绊脚石，而是成为助力大家实现梦想的垫脚石。

本书在编写过程中，力求内容精准、实用、易懂。但由于编者水平有限，书中难免存在疏漏与不足之处，恳请广大读者、老师批评指正，以便我们不断完善。

最后，愿每一位使用本书的同学，都能在 30 天的时间里，收获知识、收获自信，熟练掌握高中数学核心知识，在数学学习中找到乐趣，在备考路上稳步前行，最终实现自己的目标，不负努力、不负时光！

CONTENTS 目录

第1天 集 合

知识点一 集合的概念 …… 001
知识点二 集合间的基本关系 …… 002
知识点三 集合的基本运算 …… 003

第2天 常用逻辑用语

知识点一 充分条件与必要条件 …… 006
知识点二 全称量词与存在量词 …… 007

第3天 一元二次函数、方程和不等式

知识点一 等式性质与不等式性质 …… 008
知识点二 基本不等式 …… 009
知识点三 二次函数与一元二次方程、不等式 …… 012

第4天 函数的概念与性质（一）

知识点一 函数的概念及其表示 …… 014
知识点二 函数的基本性质 …… 017
知识点三 幂函数 …… 019

第5天 函数的概念与性质（二）

知识点一 函数的单调性 …… 021
知识点二 函数的奇偶性 …… 022
知识点三 函数图象的对称性 …… 023
知识点四 函数的周期性 …… 024

第6天 指数与指数函数

知识点一 指数 …… 027
知识点二 指数函数 …… 028

第7天 对数与对数函数

知识点一 对数 …… 030
知识点二 对数函数 …… 031
知识点三 函数的应用 …… 033

第8天 三角函数的概念

知识点一 任意角和弧度制 …… 035

知识点二　三角函数的概念 …… 038
知识点三　诱导公式 …… 039

第 9 天　三角函数的图象与性质

知识点一　三角函数的图象与性质 …… 042
知识点二　三角恒等变换 …… 045
知识点三　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ …… 049

第 10 天　平面向量的概念与运算

知识点一　平面向量的概念 …… 051
知识点二　平面向量的运算 …… 052
知识点三　平面向量基本定理及坐标表示 …… 055

第 11 天　平面向量的应用与结论

知识点一　解三角形 …… 059
知识点二　等和线定理及其相关结论 …… 060
知识点三　等差线定理及其相关结论 …… 062
知识点四　极化恒等式 …… 062
知识点五　平面多边形中的向量结论 …… 063
知识点六　奔驰定理及其推论 …… 065

第 12 天　复　数

知识点一　复数的概念 …… 067
知识点二　复数的四则运算 …… 069
知识点三　复数的三角表示 …… 070

第 13 天　立体几何初步（一）

知识点一　基本立体图形 …… 072
知识点二　立体图形的直观图 …… 076
知识点三　简单几何体的表面积与体积 …… 077

第 14 天　立体几何初步（二）

知识点一　空间点、直线、平面之间的位置关系 …… 080
知识点二　空间直线、平面的平行 …… 082
知识点三　空间直线、平面的垂直 …… 083

第 15 天　统　计

知识点一　随机抽样 …… 086
知识点二　用样本估计总体 …… 088

第16天 概　率
知识点一　随机事件与概率 …… 091
知识点二　频率与概率 …… 094
第17天 空间向量与立体几何（一）
知识点一　空间向量及其运算 …… 095
知识点二　空间向量基本定理 …… 098
知识点三　空间向量及其运算的坐标表示 …… 098
第18天 空间向量与立体几何（二）
知识点一　用空间向量研究直线、平面的位置关系 …… 101
知识点二　用空间向量研究空间距离 …… 102
知识点三　用空间向量研究空间角 …… 103
知识点四　向量法证明三垂线定理及其逆定理 …… 104
第19天 直线的方程
知识点一　直线的倾斜角与斜率 …… 106
知识点二　直线的方程 …… 107
知识点三　直线的交点坐标与距离公式 …… 109
第20天 圆的方程
知识点一　圆的方程 …… 111
知识点二　直线与圆、圆与圆的位置关系 …… 112
知识点三　圆的切线问题 …… 113
知识点四　圆的弦长问题 …… 114
知识点五　圆系方程 …… 115
第21天 椭　圆
知识点一　椭圆的概念与方程 …… 116
知识点二　点、直线与椭圆的位置关系 …… 117
知识点三　椭圆的相关结论 …… 118
第22天 双曲线
知识点一　双曲线的概念与方程 …… 125
知识点二　直线与双曲线的位置关系 …… 126
知识点三　双曲线的相关结论 …… 127
第23天 抛物线
知识点一　抛物线的概念与方程 …… 132

知识点二　直线与抛物线的位置关系 …… 133
知识点三　抛物线的相关结论 …… 133

第 24 天　等差数列

知识点一　数列的概念 …… 140
知识点二　数列的通项与前 n 项和相关结论 …… 141
知识点三　等差数列的概念 …… 143
知识点四　等差数列的性质与判定 …… 143

第 25 天　等比数列

知识点一　等比数列的概念 …… 145
知识点二　等比数列的性质与判定 …… 145
知识点三　数列求和的方法 …… 146
知识点四　数学归纳法 …… 148

第 26 天　一元函数的导数及其应用

知识点一　导数的概念及其意义 …… 149
知识点二　导数的运算 …… 150
知识点三　导数在研究函数中的应用 …… 151

第 27 天　计数原理

知识点一　分类加法计数原理与分步乘法计数原理 …… 154
知识点二　排列与组合 …… 155
知识点三　二项式定理 …… 156

第 28 天　随机变量及其分布

知识点一　条件概率与全概率公式 …… 158
知识点二　离散型随机变量及其分布列 …… 159
知识点三　离散型随机变量的数字特征 …… 160

第 29 天　二项分布、超几何分布与正态分布

知识点一　二项分布 …… 162
知识点二　超几何分布 …… 162
知识点三　正态分布 …… 163

第 30 天　成对数据的统计分析

知识点一　成对数据的统计相关性 …… 165
知识点二　一元线性回归模型及其应用 …… 166
知识点三　列联表与独立性检验 …… 167

知识点一 集合的概念

1 元素与集合的概念

(1)**元素**：一般地，把研究对象统称为元素. 元素常用小写的拉丁字母 $a, b, c, \cdots$ 表示.

(2)**集合**：把一些元素组成的总体叫做集合(简称为集). 集合通常用大写的拉丁字母 $A, B, C, \cdots$ 表示.

(3)**集合相等**：只要构成两个集合的元素是一样的，就称这两个集合是相等的.

注意 两个相等集合中的元素顺序是可以不同的.

(4)**元素的特性**：

确定性：集合中的元素必须是确定的.

无序性：集合中的元素没有先后顺序，任意改变元素的排列顺序，它们仍表示同一个集合.

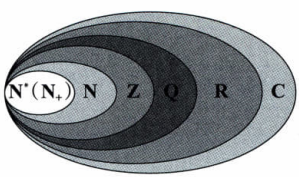
互异性：同一个集合中的元素是互不相同的.

2 元素与集合的关系

关系	语言描述	记法	读法
属于	a 是集合 A 中的元素	$a \in A$	a 属于集合 A
不属于	a 不是集合 A 中的元素	$a \notin A$	a 不属于集合 A

3 常用的数集及其记法

常用的数集	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集	复数集
记法	$\mathbf{N}$	$\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{C}$



4 集合的表示方法

(1)**列举法**：把集合的所有元素一一列举出来，并用花括号“{ }”括起来表示集合的方法叫做列举法. 例如，$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

列举法适用于表示元素个数较少或元素个数多但有规律的集合.

(2)**描述法**:用集合所含元素的共同特征表示集合的方法. 在花括号内先写上表示这个集合元素的一般符号及取值(变化)范围,再画一条竖线,在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同特征. 例如,$A=\{x\in\mathbf{R}\mid 1<x<6\}=\{x\mid 1<x<6\}$.

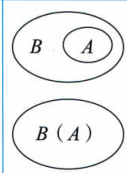
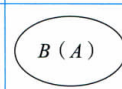
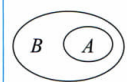
描述法适用于表示无限集或元素个数较多的集合.

(3)**图示法**:用平面上封闭曲线的内部代表集合,这种图称为 Venn 图.

封闭曲线可以是圆、矩形,也可以是其他封闭曲线. Venn 图能直观地表示集合间的关系,但集合中元素的公共特征不明显.

知识点二 集合间的基本关系

1 集合间的关系

关系	定义	记法	读法	Venn 图
子集	一般地,对于两个集合 A,B,如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中的元素,就称集合 A 为集合 B 的子集	$A\subseteq B$ (或 $B\supseteq A$)	A 包含于 B(或 B 包含 A)	
集合相等	如果 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq A$,此时集合 A 和集合 B 中的元素是一样的,称集合 A 与集合 B 相等	$A=B$	A 等于 B	
真子集	如果集合 $A\subseteq B$,但存在元素 $x\in B$,且 $x\notin A$,就称集合 A 是集合 B 的真子集	$A\subsetneq B$ (或 $B\supsetneq A$)	A 真包含于 B (或 B 真包含 A)	

2 空集

一般地,我们把不含任何元素的集合叫做空集.

⚠注意 空集是任何集合的子集,空集是任何非空集合的真子集.

3 0,{0},∅,{∅}的比较

	0	{0}	∅	{∅}
含义	实数 0	含有一个元素 0 的集合	不含有任何元素的集合	含有一个元素 ∅ 的集合
关系	$0\in\{0\}$,$0\notin\varnothing$,$0\notin\{\varnothing\}$;$\varnothing\subsetneq\{0\}$,$\varnothing\subseteq\varnothing$,$\varnothing\in\{\varnothing\}$,$\varnothing\subsetneq\{\varnothing\}$			

4 集合子集个数的计算

(1)若集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,则子集的个数为 2^n,非空子集的个数为 2^n-1,真子集的个数为 2^n-1,非空真子集的个数为 2^n-2.

(2)集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的子集情况如下.

含 0 个元素的子集:$\varnothing$,共 1 个.

含 1 个元素的子集:$\{a_1\},\{a_2\},\cdots,\{a_n\}$,共 n 个.

含 2 个元素的子集:$\{a_1,a_2\},\{a_1,a_3\},\cdots,\{a_1,a_n\},\{a_2,a_3\},\{a_2,a_4\},\cdots,\{a_2,a_n\},\cdots,\{a_{n-1},a_n\}$,共 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个.

含 3 个元素的子集:$\{a_1,a_2,a_3\},\{a_1,a_2,a_4\},\cdots,\{a_1,a_2,a_n\},\{a_2,a_3,a_4\},\{a_2,a_3,a_5\},\cdots,\{a_{n-2},a_{n-1},a_n\}$,共 $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ 个.

……

含 $(n-1)$ 个元素的子集:$\{a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}\},\{a_1,a_2,\cdots,a_{n-2},a_n\},\cdots,\{a_2,a_3,\cdots,a_n\}$,共 n 个.

含 n 个元素的子集:$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,共 1 个.

(3)对于集合 A,B,C,设集合 A 中含有 m 个元素,集合 B 中含有 n 个元素,其中 $m,n\in\mathbf{N}^*$,且 $n<m$.

若 $B\subseteq C\subseteq A$,则满足条件的集合 C 的个数为 2^{m-n};

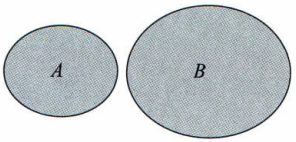
若 $B\subseteq C\subsetneq A$,则满足条件的集合 C 的个数为 $2^{m-n}-1$;

若 $B\subsetneq C\subsetneq A$,则满足条件的集合 C 的个数为 $2^{m-n}-2$.

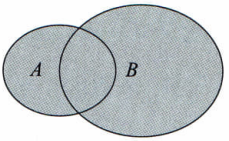
知识点三 集合的基本运算

1 集合的基本运算

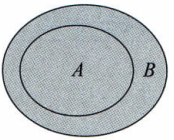
(1)**并集**:一般地,由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合,称为集合 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$,如图中阴影部分所示.



$A \cap B = \varnothing$
（无公共元素）

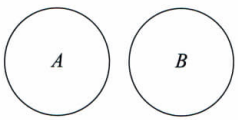


$A \cap B \neq \varnothing$
（有公共元素，且互不包含）

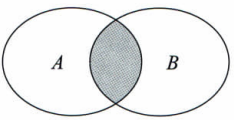


$A \subsetneq B \Rightarrow A \cup B = B$
（若 $B \subsetneq A$，则 $A \cup B = A$；若 $A = B$，则 $A \cup B = A$（或 B））

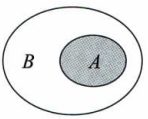
（2）**交集：**一般地，由所有既属于集合 A 又属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的交集，记作 $A \cap B$，如图中阴影部分所示.



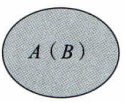
$A \cap B = \varnothing$
（无公共元素）



$A \cap B \neq \varnothing$
（有公共元素，且互不包含）



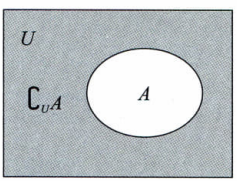
$A \subsetneq B \Rightarrow A \cap B = A$
（若 $B \subsetneq A$，则 $A \cap B = B$）



$A = B \Rightarrow A \cap B = A$（或 B）

（3）**全集：**一般地，如果一个集合含有所研究问题中涉及的所有元素，那么称这个集合为全集，通常记作 U.

（4）**补集：**对于一个集合 A，由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集，记作 $\complement_U A$，如图中阴影部分所示.



（5）**并集、交集、补集的符号语言与性质.**

基本运算	符号语言	性质
并集	$A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$	$A \cup B = B \cup A$（交换律）， $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$（结合律）， $A \subseteq (A \cup B)$，$B \subseteq (A \cup B)$， $B \subseteq A \Leftrightarrow A \cup B = A$，$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$， $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$，$A \cup A = A$

续表

基本运算	符号语言	性质
交集	$A\cap B=\{x\mid x\in A且\ x\in B\}$	$A\cap B=B\cap A$（交换律）， $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$（结合律）， $(A\cap B)\subseteq A$，$(A\cap B)\subseteq B$， $B\subseteq A\Leftrightarrow A\cap B=B$，$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$， $A\cap\varnothing=\varnothing\cap A=\varnothing$，$A\cap A=A$
补集	$\complement_U A=\{x\mid x\in U且\ x\notin A\}$	$A\cup(\complement_U A)=U$，$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$， $\complement_U(\complement_U A)=A$，$\complement_U U=\varnothing$， $\complement_U\varnothing=U$， $A\subseteq B\Leftrightarrow\complement_U A\supseteq\complement_U B$

2 容斥原理

一般地，对任意两个有限集合 A，B，有

$\operatorname{card}(A\cup B)=\operatorname{card}(A)+\operatorname{card}(B)-\operatorname{card}(A\cap B)$；

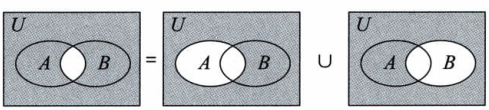
$\operatorname{card}(A\cup B\cup C)=\operatorname{card}(A)+\operatorname{card}(B)+\operatorname{card}(C)-\operatorname{card}(A\cap B)-$

$\operatorname{card}(A\cap C)-\operatorname{card}(B\cap C)+\operatorname{card}(A\cap B\cap C)$.

其中，$\operatorname{card}(A)$ 表示集合 A 中元素的个数.

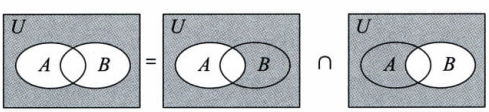
3 德·摩根定律

(1)速记口诀：交集的补集等于补集的并集.



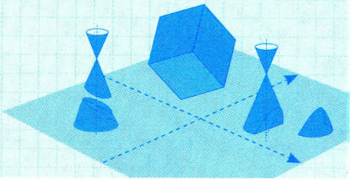
$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$

(2)速记口诀：并集的补集等于补集的交集.



$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$

第 2 天 常用逻辑用语



知识点一 充分条件与必要条件

1 命题

用语言、符号或式子表达的，可以判断真假的陈述句叫做命题. 判断为真的语句叫做真命题，判断为假的语句叫做假命题.

2 充分条件与必要条件

一般地，“若 p，则 q”为真命题，是指由 p 通过推理可以得出 q，记作 $p \Rightarrow q$，则 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

“若 p，则 q”为假命题，是指由 p 不能推出 q，记作 $p \nRightarrow q$，则 p 不是 q 的充分条件，q 不是 p 的必要条件.

3 充要条件

如果“若 p，则 q”和它的逆命题“若 q，则 p”均是真命题，即既有 $p \Rightarrow q$，又有 $q \Rightarrow p$，就记作 $p \Leftrightarrow q$. 此时 p 既是 q 的充分条件，也是 q 的必要条件，我们说 p 是 q 的充分必要条件，简称为充要条件.

4 充分必要条件的判定

(1)**定义法：**

①若 $p \Rightarrow q$，则 p 是 q 的充分条件；

②若 $q \Rightarrow p$，则 p 是 q 的必要条件；

③若 $p \Rightarrow q$，且 $q \nRightarrow p$，则 p 是 q 的充分不必要条件；

④若 $q \Rightarrow p$，且 $p \nRightarrow q$，则 p 是 q 的必要不充分条件；

⑤若 $p \Leftrightarrow q$，则 p 是 q 的充要条件；

⑥若 $p \nRightarrow q$ 且 $q \nRightarrow p$，则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

(2)**集合法：**设 $A=\{x \mid p(x)\}$，$B=\{x \mid q(x)\}$.

六种类型	集合间的关系	结论
$p \Rightarrow q$	$A \subseteq B$	p 是 q 的充分条件
$q \Rightarrow p$	$B \subseteq A$	p 是 q 的必要条件

续表

六种类型	集合间的关系	结论
$p \Rightarrow q$ 且 $q \nRightarrow p$	$A \subsetneq B$	p 是 q 的充分不必要条件
$p \nRightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$	$B \subsetneq A$	p 是 q 的必要不充分条件
$p \Leftrightarrow q$	$A = B$	p 是 q 的充要条件
$p \nRightarrow q$ 且 $q \nRightarrow p$	$A \not\subseteq B$ 且 $B \not\subseteq A$	p 是 q 的既不充分也不必要条件

知识点二　全称量词与存在量词

1　全称量词与存在量词

	全称量词	存在量词
量词	所有的，任意一个，全部的	存在一个，至少有一个
符号	$\forall$	$\exists$
命题	全称量词命题	存在量词命题
命题形式	$\forall x \in M, p(x)$	$\exists x \in M, p(x)$

2　含量词的命题的否定

(1) **全称量词命题**：$\forall x \in M, p(x)$，它的否定：$\exists x \in M, \neg p(x)$，是一个存在量词命题.

(2) **存在量词命题**：$\exists x \in M, p(x)$，它的否定：$\forall x \in M, \neg p(x)$，是一个全称量词命题.

3　常见词语的否定

词语	是	一定	都	大于	小于
词语的否定	不是	不一定	不都	小于或等于	大于或等于
词语	且	必有一个	至少有 n 个	至多有一个	所有 x 成立
词语的否定	或	一个都没有	至多有 $(n-1)$ 个	至少有两个	存在一个 x 不成立

4　命题真假的等价转换

(1) $\exists x \in \mathbf{R}$，$y = 0$，等价于方程 $y = 0$ 有实数根；

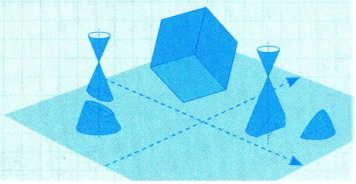
(2) $\forall x \in \mathbf{R}$，$y > 0$，就是不等式 $y > 0$ 恒成立，等价于 $y_{\min} > 0$；

(3) $\exists x \in \mathbf{R}$，$y > 0$，就是不等式 $y > 0$ 有解，等价于 $y_{\max} > 0$；

(4) $\forall x \in \mathbf{R}$，$y < 0$，就是不等式 $y < 0$ 恒成立，等价于 $y_{\max} < 0$；

(5) $\exists x \in \mathbf{R}$，$y < 0$，就是不等式 $y < 0$ 有解，等价于 $y_{\min} < 0$.

第3天 一元二次函数、方程和不等式



知识点一 等式性质与不等式性质

1 不等关系与不等式符号

(1)在现实世界和日常生活中,数量间的不等关系是普遍存在的,通常用数学符号“$\neq$”“$>$”“$\geqslant$”“$<$”“$\leqslant$”来连接两个数或两个式子,以表示它们之间的不等关系.

(2)**不等式符号“$\neq$”“$\geqslant$”“$\leqslant$”的含义:**

不等式	读作	含义
$a \neq b$	a 不等于 b	$a>b$ 或 $a<b$
$a \geqslant b$	a 大于或等于 b	$a>b$ 或 $a=b$;a 不小于 b
$a \leqslant b$	a 小于或等于 b	$a<b$ 或 $a=b$;a 不大于 b

2 关于实数 a,b 大小比较的基本事实

(1)**基本事实**(作差法比较大小的依据).

如果 $a-b$ 是正数,那么 $a>b$;

如果 $a-b$ 等于 0,那么 $a=b$;

如果 $a-b$ 是负数,那么 $a<b$. 反过来也对.

(2)**基本事实的延伸**(作商法比较大小的依据).

如果 $\frac{a}{b}>1$,且 $b>0$,那么 $a>b$;

如果 $\frac{a}{b}=1$,且 $b>0$,那么 $a=b$;

如果 $\frac{a}{b}<1$,且 $b>0$,那么 $a<b$.

3 等式的基本性质

- 性质1:如果$a=b$,那么$b=a$(对称性)
- 性质2:如果$a=b$,$b=c$,那么$a=c$(传递性)
- 性质3:如果$a=b$,那么$a \pm c=b \pm c$(可加性)
- 性质4:如果$a=b$,那么$ac=bc$(乘法法则)
- 性质5:如果$a=b$,$c \neq 0$,那么$\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$(除法法则)

4 不等式的基本性质

性质1	如果$a>b$，那么$b<a$；如果$b<a$，那么$a>b$（对称性）
性质2	如果$a>b$，$b>c$，那么$a>c$（传递性）
性质3	如果$a>b$，那么$a+c>b+c$（可加性）
性质4	如果$a>b$，$c>0$，那么$ac>bc$；如果$a>b$，$c<0$，那么$ac<bc$（乘法法则）
性质5	如果$a>b$，$c>d$，那么$a+c>b+d$（可加性）
性质6	如果$a>b>0$，$c>d>0$，那么$ac>bd$（乘法法则）
性质7	如果$a>b>0$，那么$a^n>b^n$（$n\in\mathbf{N}$，$n\geqslant 2$）（乘方性）
性质8	如果$a>b>0$，那么$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（$n\in\mathbf{N}$，$n\geqslant 2$）（开方性）

5 常见的不等式相关结论

（1）若$a>b>m>0$，则$\dfrac{b-m}{a-m}<\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+m}{a+m}$；$\dfrac{a+m}{b+m}<\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-m}{b-m}$.

（2）若$a>b>0$，$m>n>0$，则$\dfrac{b+n}{a+n}<\dfrac{b+m}{a+m}$.

（3）若$a<0<b$，则$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$.

（4）若$a>b>0$，$m>n>0$，则$\dfrac{a}{n}>\dfrac{b}{m}$.

知识点二 基本不等式

1 重要不等式

重要不等式：一般地，$\forall a,b\in\mathbf{R}$，有$a^2+b^2\geqslant 2ab$，当且仅当$a=b$时，等号成立.

重要不等式的常见变形：

（1）$\forall a,b\in\mathbf{R}$，有$ab\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}$，当且仅当$a=b$时，等号成立.

（2）$\forall a,b\in\mathbf{R}$，有$4ab\leqslant(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$，即$ab\leqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}$，当且仅当$a=b$时，等号成立.

2 基本不等式(均值不等式、均值定理)

如果 $a>0$, $b>0$, 那么 $\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}$, 当且仅当 $a=b$ 时, 等号成立.

通常称不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}$ 为基本不等式. 其中, $\dfrac{a+b}{2}$ 叫做正数 a, b 的算术平均数, $\sqrt{ab}$ 叫做正数 a, b 的几何平均数.

速记口诀: 两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.

使用基本不等式求最值时, 需要牢记“一正、二定、三相等”. “一正”指两个变量为正值, “二定”指两个变量的和或积为定值, “三相等”指当且仅当两个变量相等时等号成立.

3 基本不等式的常见变形

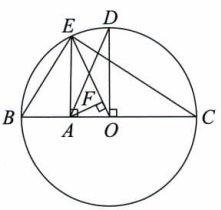
(1) $a^2+b^2\geqslant 2ab$, 其中 $a, b\in\mathbf{R}$.

(2) $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\dfrac{a+b}{2}$, 其中 $a, b\in\mathbf{R}$.

(3) $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$, 其中 $a>0$, $b>0$.

推导: 如图所示, 在以 BC 为直径的圆 O 中, 设 $AB=a$, $AC=b$, 则

$AE=\sqrt{ab}$, $OD=\dfrac{a+b}{2}$, $AD=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$, $EF=\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$. 由图可知 $EF\leqslant AE\leqslant OD\leqslant AD$, 故不等式成立.



4 最值定理

已知 $x>0$, $y>0$, 则:

如果 $xy=P$ (积为定值), 那么当 $x=y$ 时, $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{P}$;

如果 $x+y=S$ (和为定值), 那么当 $x=y$ 时, xy 有最大值 $\left(\dfrac{S}{2}\right)^2$.

速记口诀: 积定和最小, 和定积最大.

5 利用基本不等式求最值

(1)**构造定值条件的常用技巧**：加减项、拆项、换元、平方等. 例如，若$x>1$，则$2x+1+\frac{3}{x-1}=2x-2+2+1+\frac{3}{x-1}=2(x-1)+\frac{3}{x-1}+3$，此时$2(x-1)$与$\frac{3}{x-1}$的乘积为定值6.

(2)**“1”的代换的一般步骤**：

步骤一：若条件中的等式不等于1，则可将等式变形为“1”的表达式.

步骤二：将“1”的表达式与所求最值的代数式相乘或相除，通过变形构造定值.

步骤三：利用基本不等式求最值.

6 柯西不等式

(1)**二维形式**：若a,b,c,d均为实数，则$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$，当且仅当$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$或$a=b=0$或$c=d=0$时，等号成立.

推导：设函数$f(x)=(ax+c)^2+(bx+d)^2=(a^2+b^2)x^2+2(ac+bd)x+(c^2+d^2)$，

显然$f(x)\geqslant0$，即$(a^2+b^2)x^2+2(ac+bd)x+(c^2+d^2)\geqslant0$恒成立，

所以$\Delta=4(ac+bd)^2-4(a^2+b^2)(c^2+d^2)\leqslant0$，整理得$(ac+bd)^2\leqslant(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)$，当且仅当$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$或$a=b=0$或$c=d=0$时，等号成立.

(2)**三维形式**：若a,b,c,d,e,f均为实数，则$(a^2+b^2+c^2)(d^2+e^2+f^2)\geqslant(ad+be+cf)^2$，当且仅当$\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f}$或$a=b=c=0$或$d=e=f=0$时，等号成立.

推导：设向量$\boldsymbol{m}=(a,b,c)$，$\boldsymbol{n}=(d,e,f)$，两向量夹角为θ，

则$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|\cos\theta$，即$ad+be+cf=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{d^2+e^2+f^2}\cdot\cos\theta$.

因为$\cos\theta\leqslant1$，所以$ad+be+cf\leqslant\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{d^2+e^2+f^2}$，

即$(ad+be+cf)^2\leqslant(a^2+b^2+c^2)(d^2+e^2+f^2)$，当且仅当$\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f}$或$a=b=c=0$或$d=e=f=0$时，等号成立.