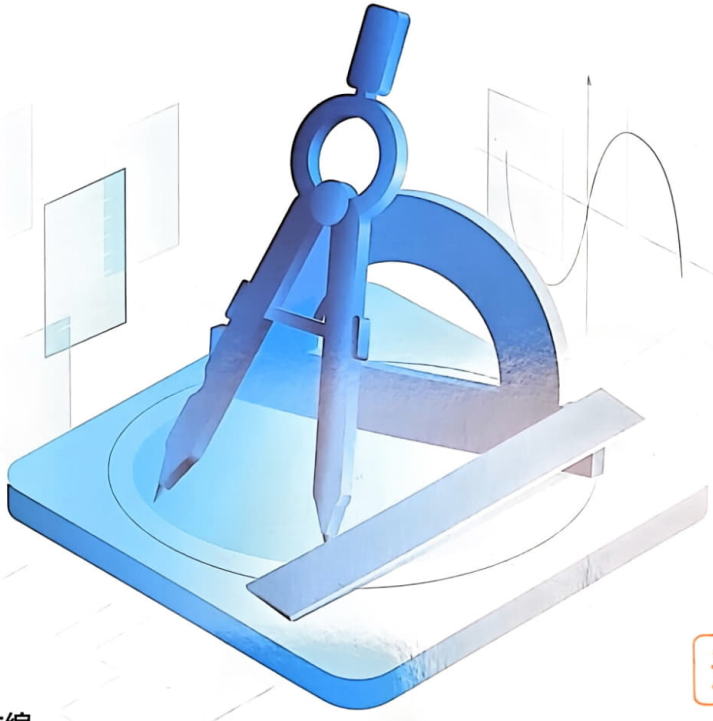
深挖教材



通用版

赵礼显 / 主编

高中数学讲与练

显哥带你 ——

“深度解读教材　搞定教材难点”

319题 精讲视频

涵盖 人教A、B版 | 北师大版 | 苏教版 | 湘教版

东北师范大学出版社
NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS

目　录

第一章　集合与常用逻辑用语 …… 1

第二章　一元二次函数、方程和不等式 …… 5

第三章　函数的概念与性质 …… 10

第四章　幂函数、指数函数与对数函数 …… 19

第五章　三角函数 …… 33

第六章　平面向量及其应用 …… 55

第七章　复数 …… 72

第八章　立体几何初步 …… 78

第九章　空间向量与立体几何 …… 86

第十章　直线和圆的方程 …… 93

第十一章　圆锥曲线的方程 …… 107

第十二章　数列 …… 124

第十三章　一元函数的导数及其应用 …… 143

第十四章　计数原理 …… 151

第十五章　概率统计 …… 171

第一章　集合与常用逻辑用语

1. (人教 A 版必修一 P15 阅读与思考)

集合中元素的个数

在研究集合时,经常遇到有关集合中元素的个数问题. 我们把含有限个元素的集合 A 叫做有限集,用 $\mathrm{card}(A)$ 来表示有限集合 A 中元素的个数. 例如,$A=\{a,b,c\}$,则 $\mathrm{card}(A)=3$.

看一个问题. 某超市进了两次货,第一次进的货是圆珠笔、钢笔、橡皮、笔记本、方便面、汽水共 6 种,第二次进的货是圆珠笔、铅笔、火腿肠、方便面共 4 种,两次一共进了几种货?

回答两次一共进了 $10(=6+4)$ 种,显然是不对的. 让我们试着从集合的角度考虑这个问题.

用集合 A 表示第一次进货的品种,用集合 B 表示第二次进货的品种,就有

$$A=\{\text{圆珠笔,钢笔,橡皮,笔记本,方便面,汽水}\},$$

$$B=\{\text{圆珠笔,铅笔,火腿肠,方便面}\}.$$

这里 $\mathrm{card}(A)=6$,$\mathrm{card}(B)=4$. 求两次一共进了几种货,这个问题指的是求 $\mathrm{card}(A\cup B)$. 这个例子中,两次进的货里有相同的品种,相同的品种数实际就是 $\mathrm{card}(A\cap B)$. $\mathrm{card}(A)$,$\mathrm{card}(B)$,$\mathrm{card}(A\cup B)$,$\mathrm{card}(A\cap B)$之间有什么关系呢?

可以算出

$$\mathrm{card}(A\cup B)=8,$$

$$\mathrm{card}(A\cap B)=2.$$

一般地,对任意两个有限集合 A,B,有

$$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B).$$

扫码查看讲解视频

2. (人教 A 版必修一 P35 复习参考题 1-11)

学校举办运动会时,高一(1)班共有 28 名同学参加比赛,有 15 人参加游泳比赛,有 8 人参加田径比赛,有 14 人参加球类比赛,同时参加游泳比赛和田径比赛的有 3 人,同时参加游泳比赛和球类比赛的有 3 人,没有人同时参加三项比赛. 同时参加田径和球类比赛的有多少人? 只参加游泳一项比赛的有多少人?

3. (赵礼显数学严选)

为完成一项实地测量任务,夏令营的同学们成立了一支测绘队,需要 24 人参加测量,20 人参加计算,16 人参加绘图. 测绘队的成员中有许多同学是多面手,有 8 人既参加了测量又参加了计算,有 6 人既参加了测量又参加了绘图,有 4 人既参加了计算又参加了绘图,另有一些人三项工作都参加了,请问这个测绘队至少有多少人?

4. (苏教版必修一 P19 问题与探究)

集合运算的运算律

我们知道实数“+”“×”运算有如下运算律成立：

$a+b=b+a$，$a\times b=b\times a$；

$(a+b)+c=a+(b+c)$，$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$；

$(a+b)\times c=a\times c+b\times c$；

……

集合运算“∪”“∩”是否也满足一些运算律呢？通过具体例子，画 Venn 图进行探究，并比较集合运算“∪”“∩”的运算律与实数运算“+”“×”的运算律的相同点与不同点.

5. (北师大版必修一 P9 思考交流)

判断下列等式是否成立，并与同学交流：

(1) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

扫码查看讲解视频

(3)$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(4)$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

6. (北师大版必修一 P11 思考交流)

结合例 8 思考下面两个等式是有条件成立,还是有普遍意义. 试用 Venn 图分析说明.

(1)$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$;

(2)$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

第二章　一元二次函数、方程和不等式

1. (人教 A 版必修一 P39 探究)

图 2.1-3* 是在北京召开的第 24 届国际数学家大会的会标,会标是根据中国古代数学家赵爽的弦图设计的,颜色的明暗使它看上去像一个风车,代表中国人民热情好客. 你能在这个图中找出一些相等关系和不等关系吗?

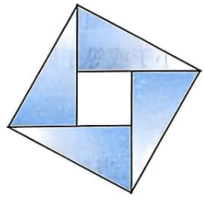


图 2.1-3

将图 2.1-3 中的"风车"抽象成图 2.1-4. 在正方形 $ABCD$ 中有 4 个全等的直角三角形. 设直角三角形的两条直角边的长为 $a,b(a\neq b)$,那么正方形的边长为 $\sqrt{a^2+b^2}$. 这样,4 个直角三角形的面积和为 $2ab$,正方形的面积为 a^2+b^2. 由于正方形 $ABCD$ 的面积大于 4 个直角三角形的面积和,我们就得到了一个不等式

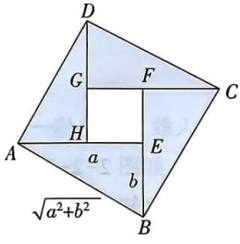


图 2.1-4

$$a^2+b^2>2ab.$$

当直角三角形变为等腰直角三角形,即 $a=b$ 时,正方形 $EFGH$ 缩为一个点,这时有

$$a^2+b^2=2ab.$$

于是就有 $a^2+b^2\geqslant 2ab$.

一般地,$\forall a,b\in\mathbf{R}$,有

$$a^2+b^2\geqslant 2ab,$$

当且仅当 $a=b$ 时,等号成立.



扫码查看讲解视频



* 图序编码以教材为准,本书未统一编码.

2. (人教 A 版必修一 P45 探究)

在图 2.2-1 中，AB 是圆的直径，点 C 是 AB 上一点，$AC=a$，$BC=b$. 过点 C 作垂直于 AB 的弦 DE，连接 AD，BD. 你能利用这个图形，得出基本不等式的几何解释吗？

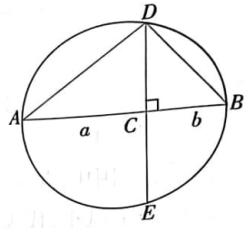


图 2.2-1

如图 2.2-1，可证 $\triangle ACD\backsim\triangle DCB$，因而 $CD=\sqrt{ab}$. 由于 CD 小于或等于圆的半径，用不等式表示为

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}.$$

显然，当且仅当点 C 与圆心重合，即当 $a=b$ 时，上述不等式的等号成立.

3. (人教 B 版必修一 P77 探索与研究)

如图 2-2-7 所示的半圆中，AB 为直径，O 为圆心.

已知 $AC=a$，$BC=b$，D 为半圆上一点，且 $DC\perp AB$，算出 OD 和 CD，给出均值不等式的另一个几何意义.

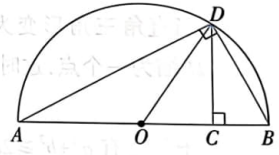


图 2-2-7

4. (人教 A 版必修一 P48 练习-4)

已知一个矩形的周长为 36 cm,矩形绕它的一条边旋转形成一个圆柱. 当矩形的边长为多少时,旋转形成的圆柱的侧面积最大?

5. (人教 A 版必修一 P49 习题 2. 2-4)

已知 x,y,z 都是正数,求证:$(x+y)(y+z)(z+x)\geqslant 8xyz$.

扫码查看讲解视频

6. (人教 A 版必修一 P49 习题 2.2-8)

设矩形 $ABCD(AB>AD)$ 的周长为 24 cm,把 $\triangle ABC$ 沿 AC 向 $\triangle ADC$ 折叠,AB 折过去后交 DC 于点 P. 设 $AB=x$ cm,求 $\triangle ADP$ 的最大面积及相应 x 的值.

7. (人教 A 版必修一 P58 复习参考题 2-5)

若 $a,b>0$,且 $ab=a+b+3$,求 ab 的取值范围.

8. (人教 A 版必修一 P57 复习参考题 2-2(3))

用不等号“>”或“<”填空：

若 $a>b>c>0$，则 $\frac{a}{b}$ ＿＿＿＿ $\frac{a+c}{b+c}$.

9. (苏教版必修一 P54 习题 3.1-11)

已知 b g 糖水中含有 a g 糖($b>a>0$)，若再添加 m g 糖($m>0$)溶解在其中，则糖水变得更甜(即糖水中含糖浓度变大)．试根据这个事实写出 a,b,m 所满足的不等关系，并给予证明.

10. (人教 A 版必修一 P156 习题 4.5-13)

有一道题“若函数 $f(x)=24ax^2+4x-1$ 在区间 $(-1,1)$ 内恰有一个零点，求实数 a 的取值范围”，某同学给出了如下解答：

由 $f(-1)f(1)=(24a-5)(24a+3)<0$，解得 $-\frac{1}{8}<a<\frac{5}{24}$.

所以，实数 a 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{8},\frac{5}{24}\right)$.

上述解答正确吗？若不正确，请说明理由，并给出正确的解答.



扫码查看讲解视频



第三章　函数的概念与性质

1. (人教 A 版必修一 P68-例 5)

画出函数 $y=|x|$ 的图象.

解:由绝对值的概念,我们有 $y=\begin{cases}-x,x<0,\\x,x\geqslant 0.\end{cases}$

所以,函数 $y=|x|$ 的图象如图 3. 1-3 所示.

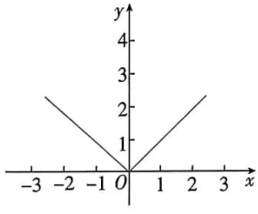


图 3. 1-3

像例 5 中 $y=\begin{cases}-x,x<0,\\x,x\geqslant 0\end{cases}$ 这样的函数称为分段函数. 生活中,有很多可以用分段函数描述的实际问题,如出租车的计费、个人所得税纳税额等.

2. (人教 A 版必修一 P68-例 6)

给定函数 $f(x)=x+1, g(x)=(x+1)^2, x\in\mathbf{R}$,

(1)在同一直角坐标系中画出函数 $f(x)$, $g(x)$ 的图象;

(2) $\forall x\in\mathbf{R}$,用 $M(x)$ 表示 $f(x)$, $g(x)$ 中的最大者,记为

$$M(x)=\max\{f(x), g(x)\}.$$

例如,当 $x=2$ 时, $M(2)=\max\{f(2), g(2)\}=\max\{3,9\}=9$.

请分别用图象法和解析法表示函数 $M(x)$.

解:(1)在同一直角坐标系中画出函数 $f(x)$, $g(x)$ 的图象(图 3.1-4).

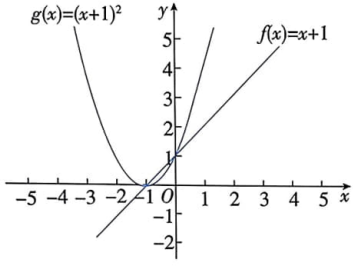


图 3.1-4

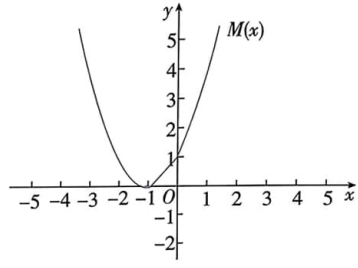


图 3.1-5

(2)由图 3.1-4 中函数取值的情况,结合函数 $M(x)$ 的定义,可得函数 $M(x)$ 的图象(图 3.1-5).

由 $(x+1)^2=x+1$,得 $x(x+1)=0$.

解得 $x=-1$,或 $x=0$.

结合图 3.1-5,得出函数 $M(x)$ 的解析式为

$$M(x)=\begin{cases}(x+1)^2, & x\leqslant -1,\\ x+1, & -1<x\leqslant 0,\\ (x+1)^2, & x>0.\end{cases}$$

扫码查看讲解视频

3. (人教 A 版必修一 P69 练习-3)

给定函数$f(x)=-x+1$,$g(x)=(x-1)^2$,$x\in\mathbf{R}$,

(1)画出函数$f(x)$,$g(x)$的图象;

(2)$\forall x\in\mathbf{R}$,用$m(x)$表示$f(x)$,$g(x)$中的最小者,记为$m(x)=\min\{f(x),g(x)\}$,请分别用图象法和解析法表示函数$m(x)$.

4. (人教 A 版必修一 P74 习题 3.1-13)

函数$f(x)=[x]$的函数值表示不超过x的最大整数,例如,$[-3.5]=-4$,$[2.1]=2$.

当$x\in(-2.5,3]$时,写出函数$f(x)$的解析式,并画出函数的图象.

5. (北师大版必修二 P2-例 2)

讨论函数 $f(x)=x-[x]$,画出它的图象,并观察其性质.

解:函数 $f(x)=x-[x]$ 是指一个数减去不超过这个数的最大整数. 它的图象如图 1-3.

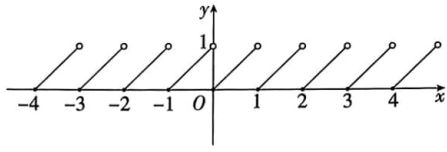


图 1-3

6. (北师大版必修二 P2-例 1)

讨论函数 $f(x)=(-1)^{[x]}$ 的图象和性质.

解:在"函数"一章,已经学习了函数 $y=[x]$. 对于每一个实数 x,其函数值 $y=[x]$ 是不超过 x 的最大整数,它不是偶数就是奇数. 根据初中学习的幂运算,可以推出:

当 $[x]$ 为偶数时,函数 $f(x)=(-1)^{[x]}=1$;

当 $[x]$ 为奇数时,函数 $f(x)=(-1)^{[x]}=-1$.

在平面直角坐标系中,该函数的图象如图 1-2.

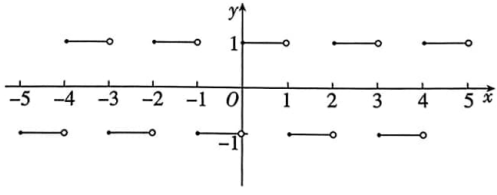


图 1-2

扫码查看讲解视频

深挖教材系列笔记

目录

第一章 集合与常用逻辑 4
第二章 一元二次函数、方程和不等式 11
第三章 函数的概念与性质 22
第四章 幂函数、指数函数与对数函数 40
第五章 三角函数 72
第六章 平面向量及其应用 112
第七章 复数 145
第八章 立体几何初步 158

第九章 空间向量与立体几何 172
第十章 直线和圆的方程 186
第十一章 圆锥曲线的方程 215
第十二章 数列 245
第十三章 一元函数的导数及其应用 283
第十四章 计数原理 299
第十五章 随机变量及其分布 345

第一章 集合与常用逻辑

1.（人教A版必修一P15阅读与思考）

集合中元素的个数

在研究集合时，经常遇到有关集合中元素的个数问题. 我们把含有限个元素的集合 A 叫做有限集，用 $card(A)$ 来表示有限集合 A 中元素的个数. 例如，$A=\{a,b,c\}$，则 $card(A)=3$.

看一个问题. 某超市进了两次货，第一次进的货是圆珠笔、钢笔、橡皮、笔记本、方便面、汽水共6种，第二次进的货是圆珠笔、铅笔、火腿肠、方便面共4种，两次一共进了几种货?

回答两次一共进了 $10(=6+4)$ 种，显然是不对的. 让我们试着从集合的角度考虑这个问题.

用集合 A 表示第一次进货的品种，用集合 B 表示第二次进货的品种，就有

$$A=\{\text{圆珠笔, 钢笔, 橡皮, 笔记本, 方便面, 汽水}\},$$

$$B=\{\text{圆珠笔, 铅笔, 火腿肠, 方便面}\}.$$

这里 $card(A)=6, card(B)=4$. 求两次一共进了几种货，这个问题指的是求 $card(A\cup B)$，这个例子中，两次进的货里有相同的品种，相同的品种数实际就是 $card(A\cap B)$. $card(A)$, $card(B)$,

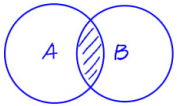
$card(A\cup B), card(A\cap B)$ 之间有什么关系呢?

可以算出

$$card(A\cup B)=8,$$
$$card(A\cap B)=2.$$

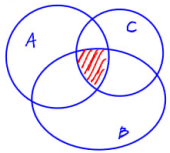
一般地, 对任意两个有限集合 A,B, 有

$$card(A\cup B)=card(A)+card(B)-card(A\cap B).$$



记 n_A 表示集合 A 中元素个数

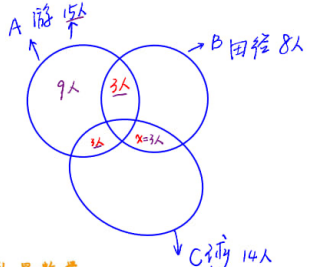
$n(A\cup B)=n_A+n_B-n_{AB}$



$n(A\cup B\cup C)=n_A+n_B+n_C-n_{AB}-n_{AC}-n_{BC}+n_{ABC}$

2. (人教A版必修一 P35 复习参考题 1—11)

学校举办运动会时, 高一(1)班共有 28 名同学参加比赛, 有 15 人参加游泳比赛, 有 8 人参加田径比赛, 有 14 人参加球类比赛, 同时参加游泳比赛和田径比赛的有 3 人, 同时参加游泳比赛和球类比赛的有 3 人, 没有人同时参加三项比赛. 同时参加田径和球类比赛的有多少人? 只参加游泳一项比赛的有多少人?

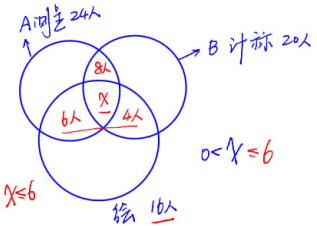


$28=15+8+14-3-3-x+0$

$13=16-x \quad \therefore x=3$

3. (赵礼显数学严选)

为完成一项实地测量任务, 夏令营的同学们成立了一支测绘队, 需要 24 人参加测量, 20 人参加计算, 16 人参加绘图. 测绘队的成员中有许多同学是多面手, 有 8 人既参加了测量又参加了计算, 有 6 人既参加了测量又参加了绘图, 有 4 人既参加了计算又参加了绘图, 另有一些人三项工作都参加了, 请问这个测绘队至少有多少人?



$n(A\cup B\cup C)=24+20+16-(x+8)-(x+6)-(x+4)+x$

$=60-18-2x$

$=42-2x \geq 42-12=30(人)$

4. (苏教版必修一 P17 问题与探究)

集合运算的运算律

我们知道实数"+""×"运算有如下运算律成立:

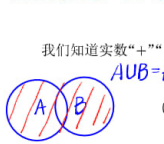
$a+b=b+a, a\times b=b\times a;$

$(a+b)+c=a+(b+c), (a\times b)\times c=a\times(b\times c);$

$(a+b)\times c=a\times c+b\times c;$

集合运算"∪""∩"是否也满足一些运算律呢? 通过具体例子, 画 *Venn* 图进行探究, 并比较集合运算"∪""∩"的运算律与实数运算"+""×"的运算律的相同点与不同点.

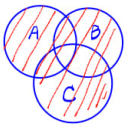
$A\cup B=B\cup A$ = 红色区域



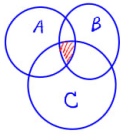
$A\cap B=B\cap A$ = 红色区域



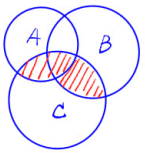
$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ = 红色区域



$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ = 红色区域



$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ = 红色区域



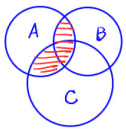
5.（北师大版必修一 P9 思考交流）

判断下列等式是否成立，并与同学交流：

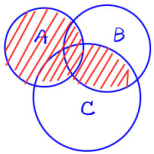
(1) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

(3) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；(4) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(3)



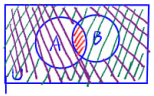
(4)

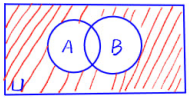


6.（北师大版必修一 P11 思考交流） 摩根律

结合例 8 思考下面两个等式是有条件成立，还是有普遍意义. 试用 *Venn* 图分析说明.

(1) $\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$；　(2) $\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.





第二章　一元二次函数、方程和不等式

$a^2+b^2\geq 2ab \Rightarrow (a-b)^2\geq 0$　$a=b$ 时

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$，$a,b\in R^+$

1.（人教 A 版必修一 P39 探究）

图 2.1－3 是在北京召开的第 24 届国际数学家大会的会标，会标是根据中国古代数学家赵爽的弦图设计的，颜色的明暗使它看上去像一个风车，代表中国人民热情好客. 你能在这个图中找出一些相等关系和不等关系吗？

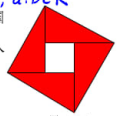


图2.1－3

将图 2.1－3 中的“风车”抽象成图 2.1－4. 在正方形 $ABCD$ 中有 4 个全等的直角三角形. 设直角三角形的两条直角边的长为 $a,b(a\neq b)$，那么正方形的边长为 $\sqrt{a^2+b^2}$. 这样，4 个直角三角形的面积和为 $2ab$，正方形的面积为 a^2+b^2. 由于正方形 $ABCD$ 的面积大于 4 个直角三角形的面积和，我们就得到了一个不等式

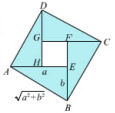


图2.1－4

$a^2+b^2\geq 4\cdot\frac{1}{2}ab$

$$a^2+b^2>2ab.$$

第二章　一元二次函数、方程和不等式

1.（人教 A 版必修一 P39 探究）

图 2.1－3 是在北京召开的第 24 届国际数学家大会的会标，会标是根据中国古代数学家赵爽的弦图设计的，颜色的明暗使它看上去像一个风车，代表中国人民热情好客. 你能在这个图中找出一些相等关系和不等关系吗？

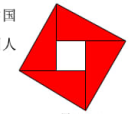


图2.1－3

将图 2.1－3 中的“风车”抽象成图 2.1－4. 在正方形 $ABCD$ 中有 4 个全等的直角三角形. 设直角三角形的两条直角边的长为 $a,b(a\neq b)$，那么正方形的边长为 $\sqrt{a^2+b^2}$. 这样，4 个直角三角形的面积和为 $2ab$，正方形的面积为 a^2+b^2. 由于正方形 $ABCD$ 的面积大于 4 个直角三角形的面积和，我们就得到了一个不等式

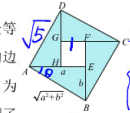


图2.1－4

$5-1=4\cdot\frac{1}{2}ab$

$\Downarrow$

$\begin{cases} ab=2 \\ a^2+b^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$

$\tan\theta=\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$

$$a^2+b^2>2ab.$$